Cálculo III - Poli - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

4 de março de 2020

Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados

Notação

Seja f uma função definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^2$. Denotamos por $\widetilde{f}$ a extensão por 0 de f, i.e. a função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in A$ e 0 caso contrário.

Definição (Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados)

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e $f : A \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é integrável em A se $\widetilde{f}$ for integrável em algum retângulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ que contenha A. Caso afirmativo, definimos

$$\int_A f := \int_Q \widetilde{f}.$$

Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados

Observação

- A condição que intervém na definição acima é independente da escolha do retângulo Q contendo A.
- Em vista do critério de Lebesgue, f limitada é integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade da extensão $\widetilde{f}$ tiver medida nula.
- Em particular, se $f : A \to \mathbb{R}$ for limitada, ∂A tiver medida nula e o conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula, então f é integrável.

Exemplos

Exemplo

Sejam $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas com $g \le h$ e $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$. Então A é limitado e ∂A tem medida nula. Tomando $Q = [a, b] \times [c, d]$ contendo A, se $f : A \to \mathbb{R}$ for descontínua num conjunto enumerável, então f é Riemann integrável e

$$\int_A f = \int_Q \widetilde{f} \overset{Fubini}{=} \int_a^b \int_c^d \widetilde{f}(x, y)\, \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x.$$

Analogamente, trocando o papel das variáveis x e y, se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le y \le b, g(y) \le x \le h(y)\}$, então

$$\int_A f = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

A integral não enxerga conjuntos de medida nula

Proposição

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ integráveis.

- *Se A tem medida nula, $\int_A f = 0$.*
- *Se $\{(x, y) \in A \mid f(x, y) \neq g(x, y)\}$ tem medida nula, então $\int_A f = \int_A g$.*
- *Se f for integrável em $B \subset \mathbb{R}^2$ e $A \cap B$ tiver medida nula, então f é integrável em $A \cup B$ e*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Integrabilidade de Funções a Valores Vetoriais

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ limitado e $f : A \to \mathbb{R}^k$ com componentes $f_1, \ldots, f_k : A \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é integrável se cada uma das suas componentes o for; caso afirmativo, a integral de f em A é o vetor de $\mathbb{R}^k$ dado por

$$\int_A f := \Big(\int_A f_1, \ldots, \int_A f_k\Big).$$

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (revisão)

Definição (Diferenciabilidade no Sentido de Fréchet)

Sejam f uma função real definida num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Diz-se que f é *derivável (no sentido de Fréchet)* em (x_0, y_0) se existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-[a(x-x_0)+b(y-y_0)]\,\overbrace{[a(x-x_0)+b(}^{=T\cdot(x-x_0,y-}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{=\|(x-x_0,y-y_0)\|}}$$

Caso afirmativo, $a, b \in \mathbb{R}$ são únicos, f admite derivadas direcionais em (x_0, y_0) com respeito a todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\partial_v f(x_0, y_0) = av_1 + bv_2$. Em particular,

$$a = \partial_x f(x_0, y_0), \quad b = \partial_y f(x_0, y_0).$$

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (revisão)

Definição (Diferenciabilidade no Sentido de Fréchet (bis))

Sejam f uma função real definida num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Diz-se que f é *derivável (no sentido de Fréchet)* em (x_0, y_0) se existir $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - T\cdot(x-x_0, y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0.$$

Caso afirmativo,

- T é única e $(\forall v \in \mathbb{R}^2)\, \exists \partial_v f(x_0, y_0) = T \cdot v$. Em particular,

$$[T]_c = \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0,y_0) & \partial_y f(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

- Chamamos T de *derivada de Fréchet* de f em (x_0, y_0). Notação: $\mathrm{D}f(x_0, y_0)$ ou $f'(x_0, y_0)$.

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definição (Diferenciabilidade no Sentido de Fréchet)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathcal{U}$. Diz-se que f é *derivável (no sentido de Fréchet)* em x_0 se existir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Proposição

Com a notação acima, se f for derivável em $x_0 \in \mathcal{U}$, então existe a derivada direcional de f em x_0 com respeito a todo $v \in \mathbb{R}^n$, a qual é dada por

$$\partial_v f(x_0) = T \cdot v.$$

Em particular, T é única, e sua matriz na base canônica é dada por

$$[T]_c = \begin{bmatrix} \partial_1 f(x_0) & \partial_2 f(x_0) & \cdots & \partial_n f(x_0) \end{bmatrix}$$

i.e a matrix $m \times n$ cuja i-ésima coluna é a derivada parcial de f em x_0 com respeito a i-ésima coordenada.

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definição (Derivada de Fréchet)

Com a notação acima, se f for derivável em x_0:

- a transformação linear T chama-se *derivada de Fréchet* de f em x_0, denotada por $\mathrm{D}f(x_0)$ ou $f'(x_0)$;
- a matriz da derivada na base canônica, $[\mathrm{D}f(x_0)]$, chama-se *matriz Jacobiana* de f em x_0;
- a função linear afim $P_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$P_1(h) := f(x_0) + \mathrm{D}f(x_0) \cdot h$$

  chama-se *polinômio de Taylor de ordem 1* de f centrado em x_0.

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definição (Jacobiano)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ derivável em x_0. O determinante da matriz $[\mathrm{D}f(x_0)]$ chama-se *jacobiano* de f em x_0, denotado por $\mathrm{J}f(x_0)$.

Se f tiver componentes $f_1, \ldots, f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, também é usual denotar $\mathrm{J}f(x_0) = \det[\mathrm{D}f(x_0)]$ por

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x_0).$$

Exemplos

Exemplo

- Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ for uma função constante, então f é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{D}f(x_0)$ é a transformação linear nula $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
- Se Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ for uma transformação linear, então f é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{D}f(x_0) = f$.

Propriedades da Derivada de Fréchet

Proposição

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ *deriváveis em* $x_0 \in \mathcal{U}$. *Então:*

- f *é contínua em* x_0.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ *é derivável em* x_0 *e* $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha \mathrm{D}f(x_0) + \beta \mathrm{D}g(x_0)$.

Proposição

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ *de classe* C^1. *Então* f *é derivável em todo* $x_0 \in U$.

Propriedades da Derivada de Fréchet

Exemplo (coordenadas polares)

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por, para todo $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(r, \theta) := (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

Então $\varphi \in \mathrm{C}^1$, logo é derivável em todo $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ e

$$[\mathrm{D}\varphi(r, \theta)] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\mathrm{J}\varphi(r, \theta) = r$.

Regra da Cadeia para a Derivada de Fréchet

Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *aberto,* $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ *aberto,* $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ *derivável em* $x_0 \in \mathcal{U}$*,* $\operatorname{Im} g \subset V$ *e* $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^k$ *derivável em* $g(x_0)$*.*
Então $f \circ g$ *é derivável em* x_0 *e*
$\mathrm{D}(f \circ g)(x_0) = \mathrm{D}f\big(g(x_0)\big) \circ \mathrm{D}g(x_0)$*.*
Em particular,

$$\big[\mathrm{D}(f \circ g)(x_0)\big] = \big[\mathrm{D}f\big(g(x_0)\big)\big]\big[\mathrm{D}g(x_0)\big].$$

Alguma Intuição Geométrica para o TMV

- Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 injetiva, $R \subset \mathcal{U}$ e $S = \varphi(R) \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que tanto R como S sejam limitados com fronteiras de medida nula e que $f : S \to \mathbb{R}$ seja contínua.
- Queremos calcular a integral $\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y)$ fazendo-se a mudança de variáveis $(x, y) = \varphi(u, v)$, imitando o TMV para a integral de Riemann na reta.
- Ou seja, queremos escrever uma igualdade da forma

$$\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y) = \int_R f\big(\varphi(u, v)\big)\,\mathrm{d}(\ldots)$$

onde "$\mathrm{d}(\ldots)$" é aquilo em que se transforma o "elemento de área" $\mathrm{d}A(x, y)$ ao fazer a referida mudança de variáveis.

Alguma Intuição Geométrica para o TMV

- Para simplificar, suponha que R seja um retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Seja P uma partição de R e $\{P_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ os retângulos de P. Tome $\xi = \{\xi_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ pontilhamento de P.
- Para $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$, seja $Q_{i,j} := \varphi(P_{i,j})$. Se $|P|$ for suficientemente pequena, é intuitivo que $\int_S f \, \mathrm{d}A$ seja aproximada pela soma

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f \circ \varphi(\xi_{i,j}) m(Q_{i,j}),$$

  onde $m(Q_{i,j})$ denota a área de $Q_{i,j}$.
- Aproximando φ numa vizinhança de $\xi_{i,j}$ pelo seu polinômio de Taylor de ordem 1 centrado em $\xi_{i,j}$, $Q_{i,j} = \varphi(P_{i,j})$ fica aproximado por $\varphi(\xi_{i,j}) + \mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j}) \cdot P_{i,j}$, o qual é congruente a $\mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j}) \cdot P_{i,j}$.

Alguma Intuição Geométrica para o TMV

- Como $\mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear, $\mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j}) \cdot P_{i,j}$ é um paralelogramo cuja área é

$$|\det \mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j})| m(P_{i,j}) = |\mathrm{J}\varphi(\xi_{i,j})| m(P_{i,j}).$$

- Portanto, $\int_S f \, \mathrm{d}A$ fica aproximada por

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f \circ \varphi(\xi_{i,j}) |\mathrm{J}\varphi(\xi_{i,j})| m(P_{i,j}),$$

  a qual é a soma de Riemann relativamente a (P, ξ) da função $f \circ \varphi \, |\mathrm{J}\varphi|$.

- Fazendo-se $|P| \to 0$, é intuitivo esperar, pois,

$$\int_S f \, \mathrm{d}A = \int_R f \circ \varphi \, |\mathrm{J}\varphi| \, \mathrm{d}A.$$

Teorema de Mudança de Variáveis

Teorema (TMV)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ *aberto,* $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ *de classe* C^1 *injetiva,* $R \subset \mathcal{U}$ *e* $S = \varphi(R) \subset \mathbb{R}^2$*. Suponha que tanto* R *como* S *sejam limitados com fronteiras de medida nula e que* $f : S \to \mathbb{R}$ *seja contínua. Então*

$$\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y) = \int_R f\big(\varphi(u, v)\big)\,|\mathrm{J}\varphi(u, v)|\,\mathrm{d}A(u, v).$$

Observação

A hipótese de que f seja contínua pode ser relaxada: basta que $f : S \to \mathbb{R}$ e $f \circ \varphi : R \to \mathbb{R}$ sejam ambas integráveis.

Teorema de Mudança de Variáveis

Exemplo (coordenadas polares)

Sejam $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto tal que $\varphi|_{\mathcal{U}}$ seja injetiva. Suponha que $R \subset \mathcal{U}$ e $S = \varphi(R)$ sejam ambos limitados com fronteiras com medida nula, e que $f : S \to \mathbb{R}$ seja contínua. Então

$$\int_S f(x, y)\, \mathrm{d}A(x, y) = \int_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, |r|\, \mathrm{d}A(r, \theta).$$