Cálculo III - Poli - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

19 de fevereiro de 2020

Integrais Duplas

Definição (Retângulos)

Um *retângulo* ou *itervalo bidimensional* é um produto $I_1 \times I_2$, onde $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ são intervalos.

Definição (Partições e Pontilhamentos)

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo compacto.

- Uma *partição* de R é um produto $P = P_1 \times P_2$ onde $P_1 = \{a = x_0 < \cdots < x_m = b\}$ é uma partição de $[a, b]$ e $P_2 = \{c = y_0 < \cdots < y_n = d\}$ é uma partição de $[c, d]$.
- Um *pontilhamento* da partição $P = P_1 \times P_2$ é um produto $\xi = \xi_1 \times \xi_2$ onde ξ_1 é pontilhamento de P_1 e ξ_2 é um pontilhamento de P_2.

Partições e Pontilhamentos (cont.)

Definição (Partições e Pontilhamentos)

- Os *retângulos* ou *subintervalos* da partição P são os produtos $P_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.
- A *norma* da partição P é $|P| := \max\{|P_1|, |P_2|\}$.

Definição (Integrabilidade no sentido de Riemann)

Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \to \mathbb{R}$.

- Dados $P = \{(x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ partição de R e $\{\xi_{i,j} = (\xi_i, \xi_j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ pontilhamento de P, a *soma de Riemann* de f com respeito a (P, ξ) é

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_{i,j}) \underbrace{(x_i - x_{i-1})(y_j - x_{j-1})}_{\text{área do } (i,j)\text{-ésimo retângulo de } P} .$$

- f diz-se *Riemann-integrável* se existir o limite das somas de Riemann de f, i.e. se a seguinte condição for satisfeita:

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partição de } R \text{ com } |P| < \delta,$$
$$\forall \xi \text{ pontilhamento de } P, \quad \left| S(f, P, \xi) - \ell \right| < \epsilon.$$

  Caso afirmativo, diz-se que ℓ é limite das somas de Riemann de f.

Proposição

O limite das somas de Riemann de $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$*, caso exista, é único.*

Definição (Integral de Riemann)

Se $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ for Riemann-integrável, chamamos o limite das suas somas de Riemann de *integral de Riemann* de f.

Notação

- $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y)$ ou $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f\,\mathrm{d}A$ ou $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$;
- $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y)$ ou $\int_{[a,b]\times[c,d]} f\,\mathrm{d}A$ ou $\int_{[a,b]\times[c,d]} f$.

Teorema (uma condição suficiente para integrabilidade)

Se $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *for contínua, então* f *é integrável.*

Interpretação Geométrica

Interpretação Geométrica

Seja $R := [a, b] \times [c, d]$. $f : R \to \mathbb{R}$ for Riemann-integrável e maior ou igual a zero, interpretamos $\int_R f \, \mathrm{d}A$ como o *volume* da região do espaço

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Soma superior e inferior, Integral superior e inferior

Definição (Soma superior e inferior)

Sejam $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P partição de $[a,b] \times [c,d]$ e $\{P_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ o conjunto dos retângulos de P. Definimos a *soma superior* e a *soma inferior* de f com respeito a P, respectivamente, por:

- $\overline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} A(P_{i,j})$,
  onde $M_{i,j} := \sup\{f(x) \mid x \in P_{i,j}\}$ e $A(P_{i,j})$ denota a área de $P_{i,j}$.
- $\underline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} A(P_{i,j})$,
  onde $m_{i,j} := \inf\{f(x) \mid x \in P_{i,j}\}$.

Soma superior e inferior, Integral superior e inferior

Definição (Integral superior e inferior)

Sejam $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a *integral superior* e a *integral inferior* de f, respectivamente, por:

- $\overline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f := \inf\{\overline{S}(f, P) \mid P \text{ partição de } [a, b] \times [c, d]\}$.
- $\underline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f := \sup\{\underline{S}(f, P) \mid P \text{ partição de } [a, b] \times [c, d]\}$.

Soma superior e inferior, Integral superior e inferior

Proposição

Sejam $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *limitada e* $P \subset Q$ *partições de* $[a, b] \times [c, d]$*. Então:*

- $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$;
- $\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q)$ *e* $\overline{S}(f, P) \geq \overline{S}(f, Q)$.

Corolário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então* $\underline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f \leq \overline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f$.

Soma superior e inferior, Integral superior e inferior

Proposição

Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável se, e somente se, $\underline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f = \overline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f$. Caso afirmativo, tem-se

$$\underline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f = \overline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_{[a,b]\times[c,d]} f.$$

Corolário

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe P partição de $[a,b] \times [c,d]$ tal que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$.

Propriedades da Integral Dupla

- Essencialmente, valem as mesmas propriedades da integral de Riemann na reta.
- Seja $Q = [a, b] \times [c, d]$. Então $\{f : Q \to \mathbb{R} \mid f \text{ integrável}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^Q$, e a integral de Riemann é linear.
- Se $f \leq g$ são ambas integráveis em Q, então $\int_Q f \leq \int_Q g$.
- Desigualdade triangular: se f e $|f|$ forem ambas integráveis em Q, então

$$\left|\int_Q f \, \mathrm{d}A\right| \leq \int_Q |f| \, \mathrm{d}A.$$

Teorema de Fubini

Teorema (Fubini)

Sejam $Q = [a,b] \times [c,d]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ integrável.

- *Se existirem as integrais iteradas $\int_a^b \big[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\big]\,\mathrm{d}x$, então*
$$\int_Q f\,\mathrm{d}A = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x.$$
- *Se existirem as integrais iteradas $\int_c^d \big[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\big]\,\mathrm{d}y$, então*
$$\int_Q f\,\mathrm{d}A = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y.$$

Teorema de Fubini

Interpretação Geométrica

Com a notação do teorema anterior, se $f \geq 0$:

- $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ é a integral em $[a,b]$ da função que associa $x \in [a,b]$ à área da seção ortogonal ao eixo Ox passando por x da região $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.
- $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ é a integral em $[c,d]$ da função que associa $y \in [c,d]$ à área da seção ortogonal ao eixo Oy passando por y da região $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.

Conjuntos de Medida Nula

Definição (Conjuntos de Medida Nula)

Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^2$ é um *conjunto de medida nula* se, para todo $\epsilon > 0$, existir uma coleção enumerável de retângulos $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $A \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) < \epsilon$, onde $m(Q_i)$ denota a área do retângulo Q_i.

Observação

- $\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i)$ denota o limite da sequência $n \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{i=1}^{n} m(Q_i)$.
- É equivalente, na definição acima, usar bolas no lugar de retângulos.
- Conjuntos de *conteúdo* nulo: mesma definição com “finita” no lugar de “enumerável”.

Condição Necessária e Suficiente para Integrabilidade

Teorema (critério de Lebesgue)

Seja $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então* f *é integrável se, e somente se, o conjunto* $D_f \subset [a, b] \times [c, d]$ *dos pontos de descontinuidade de* f *tiver medida nula.*

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Medida Nula

1. Conjuntos enumeráveis têm medida nula.
2. A união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
3. Um subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula.
4. A imagem de um conjunto de medida nula por movimentos rígidos é um conjunto de medida nula.
5. Retas têm medida nula.
6. O gráfico de uma função contínua $[a, b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula.
7. Imagens de curvas de classe C^1 têm medida nula.

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Medida Nula

Interpretação Geométrica

Um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tem medida nula se, intuitivamente, for um conjunto de "área" nula.