Cálculo III - Poli - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

17 de fevereiro de 2020

Referências Sugeridas para o Curso

- T. M. APOSTOL, *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability*, Second edition, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1969.
- H. GUIDORIZZI, *Um curso de cálculo*, v. 3, LTC, 2013.

Referência Complementar

W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 3rd ed., 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

Software de Apoio

: Maxima, a Computer Algebra System

: SageMath

Integral de Riemann na Reta (revisão)

Definição (Partições e Pontilhamentos)

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

- Uma *partição* de $[a, b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$.
- Dada $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ partição de $[a, b]$:
  - $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, chama-se *i-ésimo intervalo* de P;
  - $|P| := \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$ chama-se *norma* de P;
  - uma n-upla $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ tal que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ chama-se *pontilhamento* de P.

Definição (Integrabilidade no sentido de Riemann)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- Dados $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ partição de $[a, b]$ e $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ pontilhamento de P, a *soma de Riemann* de f com respeito a (P, ξ) é

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- f diz-se *Riemann-integrável* se existir o limite das somas de Riemann de f, i.e. se a seguinte condição for satisfeita:

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partição de } [a, b] \text{ com } |P| < \delta,$$
$$\forall \xi \text{ pontilhamento de } P, \quad \left| S(f, P, \xi) - \ell \right| < \epsilon.$$

Caso afirmativo, diz-se que ℓ é limite das somas de Riemann de f.

Proposição

O limite das somas de Riemann de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, caso exista, é único.*

Definição (Integral de Riemann)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for Riemann-integrável, chamamos o limite das suas somas de Riemann de *integral de Riemann* de f.

Notação

$\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Condições Suficientes para Integrabilidade

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for contínua, então* f *é integrável.*

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for limitada e o conjunto dos pontos de descontinuidade de* f *for finito, então* f *é integrável.*

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema (TFC, parte I)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrável. Suponha que exista* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a, b]$*, derivável em* (a, b) *e tal que* $F' = f$ *em* (a, b)*. Então*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema (TFC, parte II)

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Defina $F : I \to \mathbb{R}$ por, para todo $x \in I$,

$$F(x) := \int_a^x f.$$

Então F é derivável e $F' = f$.

Corolário

Toda função contínua definida num intervalo admite uma antiderivada.

Supremo e Ínfimo de um Conjunto de Números Reais

Definição (Cota superior e inferior, supremo e ínfimo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- Diz-se que $M \in \mathbb{R}$ é *cota superior* de A se $\forall a \in A$, $a \leq M$.
- Diz-se que $m \in \mathbb{R}$ é *cota inferior* de A se $\forall a \in A$, $m \leq a$.
- Se existir uma cota superior de A, diz-se que A é *limitado superiormente*; se existir uma cota inferior de A, diz-se que A é *limitado inferiormente*. Diz-se que A é *limitado* se o for superior e inferiormente.
- Diz-se que $M \in \mathbb{R}$ é *supremo* de A se for cota superior de A e se nenhum real menor que M for cota superior de A.
- Diz-se que $m \in \mathbb{R}$ é *ínfimo* de A se for cota inferior de A e se nenhum real maior que M for cota inferior de A.

Supremo e Ínfimo de um Conjunto de Números Reais

- Se $A \subset \mathbb{R}$ admitir supremo, ele é único e o denotamos por $\sup A$.
- Se $A \subset \mathbb{R}$ admitir ínfimo, ele é único e o denotamos por $\inf A$.

Axioma do Supremo

Se A for não vazio e limitado superiormente, então existe o supremo de A.

Corolário

Se A for não vazio e limitado inferiormente, então existe o ínfimo de A.

Supremo vs Máximo, Infímo vs Mínimo

Supremo vs Máximo

Dados $A \subset \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}$, M é o *máximo* de A (NOTAÇÃO: $\max A$) se $M = \sup A$ e $M \in A$.

Ínfimo vs Mínimo

Dados $A \subset \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$, m é o *mínimo* de A (NOTAÇÃO: $\min A$) se $m = \inf A$ e $m \in A$.

Soma superior e inferior, Integral superior e inferior

Definição (Soma superior e inferior)

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ partição de $[a, b]$. Definimos a *soma superior* e a *soma inferior* de f com respeito a P, respectivamente, por:

- $\overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$,
  onde $M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, para $1 \leq i \leq n$.
- $\underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$,
  onde $m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, para $1 \leq i \leq n$.

Soma superior e inferior, Integral superior e inferior

Definição (Integral superior e inferior)

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a *integral superior* e a *integral inferior* de f, respectivamente, por:

- $\overline{\int_a^b} f := \inf\{\overline{S}(f, P) \mid P \text{ partição de } [a, b]\}$.
- $\underline{\int_a^b} f := \sup\{\underline{S}(f, P) \mid P \text{ partição de } [a, b]\}$.

Soma superior e inferior, Integral superior e inferior

Proposição

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada e* $P \subset Q$ *partições de* $[a, b]$*.*
Então:

- $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$*;*
- $\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q)$ *e* $\overline{S}(f, P) \geq \overline{S}(f, Q)$*.*

Corolário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então* $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$*.*

Soma superior e inferior, Integral superior e inferior

Proposição

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então* f *é integrável se, e somente se,* $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$*. Caso afirmativo, tem-se*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

Corolário

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então* f *é integrável se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* P *partição de* $[a,b]$ *tal que* $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$*.*