Teorema 1 (Fubini). *Sejam $Q = [a,b] \times [c,d]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ integrável no sentido de Riemann.*

- *Se existirem as integrais iteradas $\int_a^b \big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\big]\mathrm{d}x$, então*
$$\int_Q f \mathrm{d}A = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x.$$
- *Se existirem as integrais iteradas $\int_c^d \big[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\big]\mathrm{d}y$, então*
$$\int_Q f \mathrm{d}A = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$

Notação. Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, denotamos por $\chi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a *função característica de* A, i.e. a função dada por $\chi_A(x) := 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) := 0$ se $x \notin A$.

Demonstração. Seja $\ell = \int_Q f \mathrm{d}A$. Dado $\epsilon > 0$, existe $P = P_1 \times P_2$ partição de Q tal que
$$\ell - \epsilon < \underline{S}(f,P) \leq \ell \leq \overline{S}(f,P) < \ell + \epsilon.$$

Sejam $(P_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ os retângulos de P, $m_{i,j} := \inf\{f(x) \mid x \in P_{i,j}\}$ e $M_{i,j} := \sup\{f(x) \mid x \in P_{i,j}\}$. Defina $s := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j}\chi_{P_{i,j}}$ e $S := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j}\chi_{P_{i,j}}$, de modo que
$$\underline{S}(f,P) = \int_Q s \mathrm{d}A = \int_a^b \Big[\int_c^d s(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x,$$
$$\overline{S}(f,P) = \int_Q S \mathrm{d}A = \int_a^b \Big[\int_c^d S(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x.$$

Para $x \in [a,b] \backslash P_1$ (i.e. no complementar de um conjunto finito em $[a,b]$) as desigualdades $s(x,\cdot) \leq f(x,\cdot) \leq S(x,\cdot)$ valem em todo ponto de $[c,d] \backslash P_2$ (i.e. no complementar de um conjunto finito, o qual tem medida nula). Portanto, tendo em vista que as integrais iteradas de f existem (por hipótese), segue-se da monotonicidade da integral de Riemann que, para todo $x \in [a,b] \setminus P_1$,
$$\int_c^d s(x,y)\mathrm{d}y \leq \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \leq \int_c^d S(x,y)\mathrm{d}y.$$
Daí, novamente por monotonicidade,
$$\begin{aligned} \ell - \epsilon < \underline{S}(f,P) = \int_a^b \Big[\int_c^d s(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x \leq \\ \leq \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x \leq \\ \leq \int_a^b \Big[\int_c^d S(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \overline{S}(f,P) < \ell + \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $|\ell - \int_a^b \big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\big]\mathrm{d}x| < \epsilon$. Pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$ tomado, conclui-se que $\ell = \int_a^b \big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\big]\mathrm{d}x$, donde a tese.

□