DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS PARA ALUNOS DE CÁLCULO III

GLÁUCIO TERRA

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática
Rua do Matão, 1010, 05508-090 São Paulo, Brazil.

§1. SISTEMAS FINITOS DE PONTOS MATERIAIS

Consideremos um sistema de N pontos materiais no espaço tridimensional, o qual modelaremos por uma N-upla de pontos $(q_i^0)_{1\leq i\leq N}$ em $\mathbb{R}^3$, chamada de *configuração inicial* do sistema de N pontos, e por uma N-upla $(m_i)_{1\leq i\leq N}$, onde $m_i > 0$ é a massa do i-ésimo ponto, para $1 \leq i \leq N$. A evolução temporal do sistema de N pontos será descrita por uma N-upla de funções horárias $(q_i)_{1\leq i\leq N}$, i.e. para $1 \leq i \leq N$, $q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é a função que a cada instante $t \in \mathbb{R}$ associa a posição $q_i(t)$ do i-ésimo ponto no instante t, com $q_i(0) = q_i^0$. As funções q_i serão obtidas como soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's) de segunda ordem, conforme descrito abaixo, dado pela segunda lei de Newton; em particular, serão deriváveis ao menos até segunda ordem. Como é usual em Mecânica, usamos pontos no lugar de linhas para denotar derivadas temporais, i.e. as derivadas primeiras dessas funções horárias serão denotadas por $\dot{q}_i$ e as derivadas segundas por $\ddot{q}_i$.

Em cada q_i, $1 \leq i \leq N$, atua uma "força externa" f_i e "forças internas" r_{ij}, $1 \leq j \leq N$ (r_{ij} é interpretada como a força exercida pelo ponto material q_j sobre o ponto material q_i). Precisamente:

- As f_i's são funções, a valores em $\mathbb{R}^3$, do tempo, posição e velocidade do i-ésimo ponto material, i.e. $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, interpretando-se $f_i(t, q, v) \in \mathbb{R}^3$ como sendo a força que atua no i-ésimo ponto no instante t caso sua posição seja $q_i(t) = q$ e sua velocidade $\dot{q}_i(t) = v$.
- Analogamente, as r_{ij}'s são funções, a valores em $\mathbb{R}^3$, do tempo, posição e velocidade do i-ésimo e j-ésimo pontos materiais, i.e. $r_{ij} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^4 \to \mathbb{R}^3$, interpretando-se $r_{ij}(t, q, v, p, w) \in \mathbb{R}^3$ como sendo a força que o j-ésimo ponto exerce no i-ésimo ponto no instante t caso $q_i(t) = q$, $\dot{q}_i(t) = v$, $q_j(t) = p$ e $\dot{q}_j(t) = w$.

Por simplicidade de notação, omitiremos os argumentos das funções f_i e r_{ij}, sempre que ficar claro em quais pontos dos respectivos domínios essas funções devem ser calculadas. Além disso, assumiremos, em virtude do *princípio de ação e reação*, que $r_{ij} = -r_{ji}$ (em particular, $r_{ii} = 0$ para $1 \leq i \leq N$) e que, para cada $(t, p, v, q, w) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^4$, a direção de $r_{ij}(t, q, v, p, w)$ coincida com a de $p - q$ (i.e. os vetores $r_{ij}(t, q, v, p, w)$ e $p - q$ são linearmente dependentes). Finalmente, assumiremos que as funções f_i e r_{ij} sejam suficientemente regulares (por exemplo, basta que sejam de classe C^1) para garantir a existência e unicidade de soluções do sistema de EDO's de segunda ordem dado pela lei de Newton

$$f_i + \sum_{j=1}^{N} r_{ij} = m_i \ddot{q}_i, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{1}$$

com condições iniciais (i.e. posição e velocidade inicial de cada ponto material) dadas. A existência e unicidade de tais soluções será consequência do teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias (a ser visto no Cálculo IV). Note que, como $(r_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ é antissimétrica, somando as equações em (1) obtém-se

$$\sum_{i=1}^{N} f_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{q}_i = (\sum_{i=1}^{N} m_i) \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{q}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = M\ddot{G}, \tag{2}$$

onde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ é a *massa total do sistema* e

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i q_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{3}$$

é o *centro de massa* do sistema. Ou seja, o centro de massa do sistema evolui temporalmente segundo a EDO de segunda ordem dada pela lei de Newton, considerando que o mesmo tenha massa igual a massa total do sistema e sob o mesmo atue a *força externa total* $\sum_{i=1}^{N} f_i$.

Além disso:

1) Defina o *momento angular total em relação a origem* L por

$$L := \sum_{i=1}^{N} q_i \times m_i \dot{q}_i. \tag{4}$$

Assumindo que valha (1), tem-se

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} q_i \times m_i \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^{N} q_i \times f_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} q_i \times r_{ij}.$$

Como assumimos $r_{ij} = -r_{ji}$ linearmente dependente com $q_i - q_j$ (pelo princípio de ação e reação), obtém-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} q_i \times r_{ij} &= \sum_{1\le i<j\le N} q_i \times r_{ij} + \sum_{1\le j<i\le N} q_i \times r_{ij} = \\ &= \sum_{1\le i<j\le N} [q_i \times r_{ij} + q_j \times r_{ji}] = \\ &= \sum_{1\le i<j\le N} (q_i - q_j) \times r_{ij} = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Portanto,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} q_i \times f_i \tag{6}$$

i.e. a derivada temporal do momento angular total em relação à origem é a soma dos torques das forças externas em relação à origem.

2) Também é útil considerar o *momento angular total em relação a* $P = P(t)$, onde $P(t)$ é uma curva derivável até segunda ordem a valores em $\mathbb{R}^3$, definido por

$$L_P := \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times m_i(\dot{q}_i - \dot{P}). \tag{7}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\frac{dL_P}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times m_i(\ddot{q}_i - \ddot{P}) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times m_i\ddot{q}_i - \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times m_i\ddot{P}.\end{aligned}$$

Queremos que a segunda parcela do segundo membro acima seja nula; isso ocorre, por exemplo, se $\ddot{P} \equiv 0$ (i.e. P evolui temporalmente com velocidade constante) ou se $P(t) = G(t)$, i.e. se P coincidir com o centro de massa G (pois, nesse caso, $\sum_{i=1}^{N}(q_i - P) \times m_i\ddot{P} = \big(\sum_{i=1}^{N} m_i(q_i - G)\big) \times \ddot{G} = (MG - MG) \times \ddot{G} = 0$). Assumiremos, pois, que uma dessas condições se verifique, i.e. *assumiremos que* $\ddot{P} \equiv 0$ *ou que* $P = G$. Assim sendo, e assumindo que valha a equação de Newton (1), obtém-se

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_P}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times m_i \ddot{q}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times f_i + \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times \sum_{i=1}^{N} r_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times f_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} q_i \times r_{ij}}_{=0 \text{ por } (5)} - P \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} r_{ij}}_{=0} = \\
&= \sum_{i=1}^{N} (q_i - P) \times f_i.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Em suma, se $\ddot{P} \equiv 0$ ou se P coincidir com o centro de massa, a derivada temporal do momento angular total em relação a P é a soma dos torques das forças externas em relação a P.

1. Caso de um corpo rígido.

Suponha que o sistema de N pontos materiais seja um *corpo rígido*, i.e. a evolução temporal do sistema governada pela lei de Newton (1) se dá por isometrias $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, no sentido de que, para cada instante $t \in \mathbb{R}$, existe $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria tal que $\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ e, para $1 \leq i \leq N$, $q_i(t) = \phi_t(q_i^0)$, onde a N-upla $(q_i^0)_{1 \leq i \leq N}$ descreve as posições iniciais dos pontos materiais, conforme a notação fixada anteriormente. Usaremos a notação $\phi(t, x) := \phi_t(x)$, de modo que $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Como toda isometria $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a composta de uma translação com uma transformação linear ortogonal, podemos escrever, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\phi_t(x) = R(t) \cdot x + O(t),$$

onde $O(t) \in \mathbb{R}^3$ e $R(t) \in \mathrm{O}(3)$, i.e. $R(t)$ é uma transformação linear ortogonal $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Note que, como $\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, tem-se $O(0) = 0$ e $R(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$; além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$, $O(t) = \phi_t(0)$, i.e. $O(t)$ descreve a evolução temporal da origem pelo movimento rígido. Assumiremos que as curvas $O : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $R : \mathbb{R} \to \mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^9$ sejam deriváveis ao menos até segunda ordem. Em particular, $\det R(t)$ é uma função contínua e só pode assumir valores 1 ou -1 (por ser uma transformação ortogonal); então deve ser constante (em vista do teorema do valor intermediário) e igual a 1 (porque vale 1 em $t = 0$). Ou seja, $R(t)$ toma valores no conjunto $\mathrm{SO}(3)$ das transformações lineares ortogonais com determinante 1.

PROPOSIÇÃO 1. *Para todo $t \in \mathbb{R}$, as matrizes $\dot{R}(t)R(t)^{-1}$ e $R(t)^{-1}\dot{R}(t)$ são antissimétricas.*

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$, derivamos em t os dois membros da identidade $\langle R(t) \cdot x, R(t) \cdot y\rangle \equiv \langle x, y\rangle$, obtendo-se

$$\langle \dot{R}(t) \cdot x, R(t) \cdot y\rangle + \langle R(t)x, \dot{R}(t) \cdot y\rangle = 0. \tag{9}$$

Como $R(t)^* = R(t)^{-1}$, segue de (9) que

$$\langle R(t)^{-1}\dot{R}(t) \cdot x, \cdot y\rangle + \langle x, R(t)^{-1}\dot{R}(t) \cdot y\rangle = 0,$$

mostrando, pela arbitrariedade de x, y tomados em $\mathbb{R}^3$ que $R(t)^{-1}\dot{R}(t)$ é antissimétrica.

Reaplicando-se o argumento para $R(t)^*$ no lugar de $R(t)$ (o que podemos fazer, pois $R(t)^* = R(t)^{-1} \in \mathrm{SO}(3)$), e tendo em conta que $\frac{d}{dt}\,[R(t)^*] = [\frac{d}{dt}\,R(t)]^*$ (pela linearidade da operação de adjunção) e que $[R(t)^*]^{-1} = [R(t)^{-1}]^*$, conclui-se que $[R(t)^{-1}]^*\dot{R}(t)^*$ é antissimétrica, portanto sua adjunta $\dot{R}(t)R(t)^{-1}$ também o é. □

Proposição 2. *Seja $\mathfrak{so}(3)$ o conjunto das matrizes antissimétricas 3×3 com entradas reais. Então $\mathfrak{so}(3)$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real de todas as matrizes 3×3 com entradas reais, e existe um único isomorfismo linear $\Psi : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $A \in \mathfrak{so}(3)$ e todo $v \in \mathbb{R}^3$,*

$$A \cdot v = \psi(A) \times v,$$

onde o "$\times$" no segundo membro denota o produto vetorial. Além disso, para quaisquer $A, B \in \mathfrak{so}(3)$, Ψ satisfaz

$$\Psi(AB - BA) = \Psi(A) \times \Psi(B).$$

Demonstração. É claro que $\mathfrak{so}(3)$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real de todas as matrizes 3×3 com entradas reais.

Sejam (e_1, e_2, e_3) a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e

$$E_1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então (E_1, E_2, E_3) é base de $\mathfrak{so}(3)$ e, se existir Ψ linear satisfazendo a condição enunciada, necessariamente devemos ter $\Psi(E_i) = e_i$ para $1 \le i \le 3$, de modo que Ψ fica univocamente determinada e daí a unicidade. Para provar a existência, defina Ψ na base (E_1, E_2, E_3) por estas igualdades e estenda Ψ a uma aplicação linear $\mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$. Então é claro que Ψ é um isomorfismo linear (pois leva base em base) e:

1) $\forall A = \sum_{i=1}^{3} \alpha^i E_i \in \mathfrak{so}(3)$, $\forall v = \sum_{j=1}^{3} v^j e_j \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha^i v^j E_i \cdot e_j = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha^i v^j e_i \times \cdot e_j = \\ &= \Psi(A) \times v. \end{aligned}$$

2) A relação $\Psi(AB - BA) = \Psi(A) \times \Psi(B)$ vale por um cálculo direto quando A e B são vetores da base (E_1, E_2, E_3); por linearidade, vale para quaisquer $A, B \in \mathfrak{so}(3)$.

□

Combinando-se as duas proposições anteriores, conclui-se que, para todo $t \in \mathbb{R}$, existe um único vetor $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\dot{R}(t)R(t)^{-1} \cdot v = \omega(t) \times v.$$

Ou seja, com a notação do exercício anterior, $\omega(t) = \Psi\big(\dot{R}(t)R(t)^{-1}\big)$. Além disso, como Ψ é um isomorfismo linear (em particular, é de classe C^∞) e a inversão de matrizes é de classe C^∞, segue da regra de Leibnitz e da regra da cadeia que a classe de diferenciabilidade de $t \in \mathbb{R} \mapsto \omega(t) \in \mathbb{R}^3$ é a mesma de $t \mapsto \dot{R}(t)$ (portanto, é derivável ao menos até ordem 1).

Definição 1. *Com a notação acima, chamamos $\omega(t)$ de* vetor velocidade angular *do movimento rígido ϕ_t. O vetor $\Omega(t) := R(t)^{-1} \cdot \omega(t)$ chama-se* vetor velocidade angular no referencial atrelado ao corpo *do movimento rígido ϕ_t.*

Note que todo $A \in \mathrm{SO}(3)$ preserva o produto vetorial, no sentido de que, para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$, $A \cdot (v \times w) = (A \cdot v) \times (A \cdot w)$ (prove isso como exercício). Daí, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \Omega(t) \times v &= R(t)^{-1} \cdot \omega(t) \times R(t)^{-1}R(t) \cdot v = \\ &= R(t)^{-1} \cdot \big(\omega(t) \times R(t) \cdot v\big) = \\ &= R(t)^{-1}\dot{R}(t)R(t)^{-1}R(t) \cdot v = R(t)^{-1}\dot{R}(t) \cdot v, \end{aligned}$$

logo $\Omega(t) = \Psi\big(R(t)^{-1}\dot{R}(t)\big)$.

A nomenclatura "vetor velocidade angular" se justifica pela segunda das igualdades abaixo (obtida por derivação em t dos dois membros da primeira igualdade). Para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(t,x) &= R(t)\cdot x + O(t), \\ \partial_t\phi(t,x) &= \dot{R}(t)\cdot x + \dot{O}(t) = \\ &= \dot{R}(t)R(t)^{-1}\cdot R(t)\cdot x + \dot{O}(t) = \\ &= \omega(t)\times\big(\phi_t(x) - O(t)\big) + \dot{O}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Em particular, o que vai acima vale para $x = G^0$ (onde $G^0 := G(0)$ denota a posição inicial do centro de massa) ou para $x = q_i^0$, para $1 \le i \le N$, de modo que, calculando-se as diferenças $\phi(t, q_i^0) - \phi(t, G^0)$ e $\partial_t\phi(t, q_i^0) - \partial_t\phi(t, G^0)$, obtém-se

$$\begin{aligned} &q_i(t) - G(t) = R(t)\cdot(q_i^0 - G^0), \\ &\dot{q}_i(t) - \dot{G}(t) = \omega(t)\times\big(q_i(t) - G(t)\big) = R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times(q_i^0 - G^0)\big). \end{aligned} \tag{11}$$

Portanto, de (7) obtém-se:

$$\begin{aligned} L_G(t) &= \sum_{i=1}^N m_i\big(q_i(t) - G(t)\big)\times\big(\dot{q}_i(t) - \dot{G}(t)\big) = \\ &= R(t)\cdot\sum_{i=1}^N m_i\big[(q_i^0 - G^0)\times\big(\Omega(t)\times(q_i^0 - G^0)\big)\big]. \end{aligned} \tag{12}$$

Isso nos motiva a fazer a seguinte:

Definição 2. *Para cada ponto $x \in \mathbb{R}^3$ (destaquemos os casos $x = 0$ ou $x = G^0$, i.e. a origem ou a posição inicial do centro de massa), definimos o operador linear $\mathcal{I}_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por, para todo $v \in \mathbb{R}^3$,*

$$\mathcal{I}_x\cdot v := \sum_{i=1}^N m_i\big[(q_i^0 - x)\times\big(v\times(q_i^0 - x)\big)\big].$$

Chamamos $\mathcal{I}_x$ de operador de inércia relativo a x *do corpo rígido $\{q_1^0, \ldots, q_N^0\}$. Para $x = 0$, usaremos a notação $\mathcal{I}$ no lugar de $\mathcal{I}_0$.*

Notação. Denotaremos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$.

Exercício 1. *Para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $\langle u\times v, w\rangle = \langle u, v\times w\rangle$. Sugestão:* $\langle u\times v, w\rangle = \det[u, v, w]$, i.e. o determinante da matriz cujas colunas são as matrizes de u, v, w na base canônica.

Fisicamente, se $v \in \mathbb{R}^3$ for unitário, interpretamos $\langle\mathcal{I}_x\cdot v, v\rangle$ como sendo o momento de inércia do corpo rígido relativamente ao eixo que passa por x na direção dada por v; isso decorre do fato de que, para $1 \le i \le N$, $\langle v, (q_i^0 - x)\times\big(v\times(q_i^0 - x)\big)\rangle = \|v\times(q_i^0 - x)\|^2$ (cf. exercício acima) é o quadrado da distância de q_i^0 ao referido eixo.

Com a definição acima, podemos reescrever o momento angular total do corpo rígido $\{q_1^0, \dots, q_N^0\}$ em relação ao centro de massa G, dado por (12), em termos do operador de inércia $\mathcal{I}_{G^0}$:

$$(\forall t \in \mathbb{R})\, L_G(t) = R(t)\, \mathcal{I}_{G^0} \cdot \Omega(t). \tag{13}$$

Também podemos desfrutar do operador de inércia para escrever uma fórmula útil para a *energia cinética* associada ao movimento rígido ϕ_t, i.e. a função $\mathrm{K} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por, para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{K}(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \|\dot{q}_i(t)\|^2.$$

Do exercício 1 e de (11), obtém-se (verifique os detalhes da segunda igualdade):

(14)

$$\begin{aligned} 2\mathrm{K}(t) &= \sum_{i=1}^{N} m_i \|R(t) \cdot \big(\Omega(t) \times (q_i^0 - G^0)\big) + \dot{G}(t)\|^2 = \\ &= \langle \Omega(t), \sum_{i=1}^{N} m_i (q_i^0 - G^0) \times \big(\Omega(t) \times (q_i^0 - G^0)\big) \rangle + M \|\dot{G}(t)\|^2 = \\ &= \langle \mathcal{I}_{G^0} \cdot \Omega(t), \Omega(t) \rangle + M \|\dot{G}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Proposição 3. *Para todo $x \in \mathbb{R}^3$, o operador de inércia $\mathcal{I}_x$ é auto-adjunto (com respeito ao produto interno usual do $\mathbb{R}^3$) e positivo semi-definido. Além disso, se ao menos dois dos vetores $q_i^0 - x$, $1 \le i \le N$, forem linearmente independentes, então $\mathcal{I}_x$ é positivo definido.*

Demonstração. Recorde a identidade satisfeita pelo duplo produto vetorial em $\mathbb{R}^3$, i.e. para todos $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$A \times (B \times C) = \langle A, C \rangle B - \langle A, B \rangle C. \tag{15}$$

Segue desta identidade que, para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}_x \cdot v, w \rangle &= \sum_{i=1}^{N} m_i \langle (q_i^0 - x) \times \big(v \times (q_i^0 - x)\big), w \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \big(\langle q_i^0 - x, q_i^0 - x \rangle \langle v, w \rangle - \langle q_i^0 - x, v \rangle \langle q_i^0 - x, w \rangle \big), \end{aligned}$$

e cada parcela do último membro acima é simétrica em v e w, de modo que o somatório também coincide com $\langle v, \mathcal{I}_x \cdot w \rangle$.

Além disso, para $v = w$, obtém-se

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{I}_x \cdot v, v\rangle &= \sum_{i=1}^{N} m_i\big(\langle q_i^0 - x, q_i^0 - x\rangle\langle v, v\rangle - \langle q_i^0 - x, v\rangle\langle q_i^0 - x, v\rangle\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \|(q_i^0 - x) \times v\|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

portanto $\mathcal{I}_x$ é positivo semidefinido. Se valer a igualdade, i.e. se $\langle \mathcal{I}_x \cdot v, v\rangle = 0$, deveremos ter $\|(q_i^0 - x) \times v\| = 0$ para $1 \leq i \leq N$, portanto $(q_i^0 - x) \times v = 0$ para $1 \leq i \leq N$. Com a hipótese de que ao menos dois dos vetores $q_i^0 - x$, $1 \leq i \leq N$, sejam linearmente independentes, conclui-se que v deve ser zero caso valha a igualdade. Portanto, $\mathcal{I}_x$ é positivo definido, como afirmado. □

Em particular, o operador de inércia $\mathcal{I}_x$ é diagonalizável, com autovalores positivos, e existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $\mathcal{I}_x$.

Definição 3. *Com a notação acima, os autovalores e autovetores do operador de inércia $\mathcal{I}_x$ chamam-se, respectivamente,* momentos principais de inércia *e* direções principais de inércia *do corpo rígido $\{q_1^0, \ldots, q_N^0\}$ relativamente a x.*

Proposição 4 (teorema de Steiner). *Para todos $x, v \in \mathbb{R}^3$,*

$$\mathcal{I}_x \cdot v = \mathcal{I}_{G^0} \cdot v + M\big[(G^0 - x) \times \big(v \times (G^0 - x)\big)\big].$$

Em particular, para $v \in \mathbb{R}^3$ unitário, obtém-se $\langle \mathcal{I}_x \cdot v, v\rangle = \langle \mathcal{I}_{G^0} \cdot v, v\rangle + M\|v \times (G^0 - x)\|^2$, i.e. "o momento de inércia relativamente ao eixo que passa por x na direção de v é o momento de inércia relativamente ao eixo que passa por G^0 na direção de v mais a massa total vezes o quadrado da distância de G^0 ao eixo que passa por x na direção de v".

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
(\forall v \in \mathbb{R}^3)\ \mathcal{I}_x \cdot v &= \sum_{i=1}^N m_i\big[(q_i^0 - x) \times \big(v \times (q_i^0 - x)\big)\big] = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i\big[(q_i^0 - G^0 + G^0 - x) \times \big(v \times (q_i^0 - G^0 + G^0 - x)\big)\big] = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i\big[(q_i^0 - G^0) \times \big(v \times (q_i^0 - G^0)\big)\big] + \\
&\quad + M\big[(G^0 - x) \times \big(v \times (G^0 - x)\big)\big] + \\
&\quad + (G^0 - x) \times \big(v \times \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i(q_i^0 - G^0)}_{=0}\big) + \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i(q_i^0 - G^0)}_{=0} \times \big(v \times (q_i^0 - G^0)\big) = \\
&= \mathcal{I}_{G^0} \cdot v + M\big[(G^0 - x) \times \big(v \times (G^0 - x)\big)\big].
\end{aligned}
$$

$\square$

Obteremos agora equações de movimento para o corpo rígido $\{q_1^0, \dots, q_N^0\}$. Em vista de (10), tem-se, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\phi_t(x) = R(t) \cdot (x - G^0) + G(t).$$

O movimento rígido ϕ_t fica determinado, portanto, por $R(t)$ e $G(t)$. Ou seja, descrever a evolução temporal do corpo rígido sob estudo significa encontrar equações diferenciais para $R(t)$ e $G(t)$ que as determinem (com condições iniciais adequadas).

A primeira equação é (2). Obteremos a segunda a partir de (8) com $P = G$ e de (13):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \big(q_i(t) - G(t)\big) \times f_i = \frac{dL_G}{dt} &\overset{(13)}{=} \\
&= \dot{R}(t)\, \mathcal{I}_{G^0} \cdot \Omega(t) + R(t)\, \mathcal{I}_{G^0} \cdot \dot{\Omega}(t).
\end{aligned}
$$

Aplicando-se $R(t)^{-1}$ a ambos os membros, obtém-se:

$$\mathcal{I}_{G^0} \cdot \dot{\Omega}(t) + \Omega(t) \times \big(\mathcal{I}_{G^0} \cdot \Omega(t)\big) = \sum_{i=1}^N (q_i^0 - G^0) \times R(t)^{-1} \cdot f_i.$$

Assumiremos que o operador de inércia $\mathcal{I}_{G^0}$ seja definido positivo; é o caso, por exemplo, se valer a hipótese da proposição 3, i.e. se ao menos dois dos vetores $q_i^0 - G^0$, $1 \le i \le N$, forem linearmente independentes.

Até aqui, consideramos as f_i's como funções do tempo, posição e velocidade do i-ésimo ponto material, ou seja, de $t, q_i, \dot{q}_i$; como q_i e $\dot{q}_i$ podem ser escritas como funções de R, Ω, G e $\dot{G}$ (estamos assumindo que a configuração inicial $(q_i^0)_{1\le i\le N}$ é dada), podemos fazer a composição dessas funções e escrever f_i como função de $t, R, \Omega, G, \dot{G}$ (e usaremos o mesmo símbolo f_i para a função composta). Assumindo que as funções $f_i = f_i(t, R, \Omega, G, \dot{G})$ sejam suficientemente regulares (digamos, basta que sejam de classe C^1, o que é o caso se as funções f_i dadas inicialmente também o forem) de modo a valer o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, conclui-se que a terna $\big(G(t), R(t), \Omega(t)\big)$ é a única solução do sistema de EDO's

$$(16)\quad \begin{cases} \ddot{G} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N f_i(t, R, \Omega, G, \dot{G}) \\ \dot{R} = R\Psi^{-1}(\Omega) \\ \mathcal{I}_{G^0}\cdot\dot{\Omega} + \Omega\times\big(\mathcal{I}_{G^0}\cdot\Omega\big) = \sum_{i=1}^N (q_i^0 - G^0)\times R^{-1}\cdot f_i(t, R, \Omega, G, \dot{G}) \end{cases}$$

com condições iniciais $G(0) = G^0$, $\dot{G}(0)$, $R(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ e $\Omega(0)$. Recorde que $M = \sum_{i=1}^N m_i$ é a massa total do corpo rígido e $\Psi : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ é o isomorfismo linear definido na proposição 2. Além disso, note que, como o operador de inércia $\mathcal{I}_{G^0}$ é definido positivo, em particular é inversível, de modo que podemos multiplicar os dois membros da última equação por $\mathcal{I}_{G^0}^{-1}$ e escrever $\dot{\Omega}$ como função de $t, R, \Omega, G, \dot{G}$, i.e. a equação pode ser colocada na forma normal e (16) é de fato um sistema de EDO's na forma normal para o qual o teorema de existência e unicidade pode ser aplicado.

O movimento rígido ϕ_t fica univocamente determinado, pois, pelas equações 16 com as condições iniciais dadas; chamamos tais equações de *equações de movimento* do corpo rígido $\{q_1^0, \dots, q_N^0\}$.

Finalmente, note que, no caso de um sistema livre, i.e. se as f_i's forem todas nulas, a última equação se desacopla do sistema e se escreve

$$(17)\qquad \mathcal{I}_{G^0}\cdot\dot{\Omega} + \Omega\times\big(\mathcal{I}_{G^0}\cdot\Omega\big) = 0,$$

conhecida como *equação de Euler* para o corpo rígido.

2. Caso de um corpo rígido com um ponto fixo.

Caso o movimento rígido admita um ponto fixo, as equações de movimento ficam mais simples se considerarmos o momento angular total em relação a esse ponto. Fazendo-se uma translação do sistema de coordenadas, se necessário, assumiremos que o ponto fixo é a origem. Assim sendo, em (10), $O(t) \equiv 0$, de modo que, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \phi(t,x) &= R(t)\cdot x,\\ \partial_t\phi(t,x) &= \omega(t)\times\phi_t(x) = R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times x\big). \end{aligned} \tag{18}$$

Nesse caso, a energia cinética é dada por, para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(t) &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\|\dot q_i(t)\|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\|R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times q_i^0\big)\|^2 \overset{R(t)\in \mathrm{SO}(3)}{=} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\|\Omega(t)\times q_i^0\|^2 \overset{\text{ex. }1}{=} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\langle\Omega(t), q_i^0\times\big(\Omega(t)\times q_i^0\big)\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\langle\mathcal{I}\cdot\Omega(t),\Omega(t)\rangle, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{I}=\mathcal{I}_0$ é o operador de inércia com respeito à origem.

De (4) e (18), o momento angular total em relação à origem é dado por, para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_{i=1}^{N} q_i(t)\times m_i\dot q_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} R(t)\cdot\big[q_i^0\times m_i\big(\Omega(t)\times q_i^0\big)\big] = \\ &= R(t)\,\mathcal{I}\cdot\Omega(t). \end{aligned} \tag{19}$$

Portanto, em vista de (6), para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$R(t)\,\mathcal{I}\cdot\Omega(t) = \sum_{i=1}^{N} q_i(t)\times f_i$$

donde, aplicando-se $R(t)^{-1}$ a ambos os membros,

$$\mathcal{I}\cdot\Omega(t) = \sum_{i=1}^{N} q_i^0\times R(t)^{-1}\cdot f_i$$

Assumindo que $\mathcal{I}$ seja definido positivo (é o caso se valer a hipótese da proposição 3, por exemplo), conclui-se, como na subseção anterior, que $\big(R(t),\Omega(t)\big)$ é a única solução do sistema de EDO's de primeira ordem

$$
(20) \qquad \begin{cases} \dot{R} = R\Psi^{-1}(\Omega) \\ \mathcal{I}\cdot\dot{\Omega} + \Omega \times \big(\mathcal{I}\cdot\Omega\big) = \sum_{i=1}^{N} q_i^0 \times R^{-1}\cdot f_i(t,R,\Omega) \end{cases}
$$

com condições iniciais $R(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ e $\Omega(0)$.

§2. DISTRIBUIÇÕES DE MASSA CONTÍNUAS

Substituiremos agora o corpo rígido $\{q_i^0, \dots, q_i^N\}$ (que corresponde a uma distribuição de massa "discreta"[1]) por uma distribuição de massa "contínua" (i.e. dada por uma densidade $\rho(x)\mathrm{d}x$ em $\mathbb{R}^3$[2]). Consideraremos apenas distribuições de massa que sejam dadas por "medidas de volume", mas não há dificuldade alguma em generalizar o que segue para distribuições de massa mais gerais — por exemplo, se forem dadas por "medidas de superfície" (i.e. o corpo rígido tem sua massa distribuída ao longo de uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$). Essencialmente, a dedução das equações de movimento é a mesma da seção anterior, substituindo-se os somatórios que aparecem no caso discreto por integrais no presente caso, obtidas através das aproximações usuais por meio de somas de Riemann. Os detalhes seguem abaixo.

1) A *configuração inicial* do corpo rígido é um conjunto limitado $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira de medida nula[3], i.e. um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^3$ cuja função característica seja Riemann-integrável.
2) A *densidade* ou *distribuição de massa* na configuração inicial é uma função Riemann-integrável[4] $\rho : \mathcal{B} \to [0, \infty)$. Por conveniência, estendemos ρ a uma função $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definindo-a como sendo zero no complementar de $\mathcal{B}$.

   Para cada $B \subset \mathcal{B}$ com fronteira de medida nula, a *massa de B* é

$$
m(B) := \int_B \rho(x)\mathrm{d}x.
$$

   Estendemos a definição acima para um conjunto $B \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira de medida nula, usando a mesma fórmula; ou seja, $m(B) = m(B \cap \mathcal{B})$.

   Chamamos $m(\mathcal{B})$ de *massa total do corpo rígido.* Assumiremos $m(\mathcal{B}) > 0$. Definimos o *centro de massa* G^0 da configuração inicial

[1] precisamente, dada por uma soma finita de medidas de Dirac.

[2] ou, para quem já estudou a *teoria da medida e integração*, dada por uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

[3] para quem já tiver estudado teoria da medida e integração, tome $\mathcal{B}$ um boreliano limitado.

[4] ou, seguindo a nota anterior, a distribuição de massa é uma medida $\mu = \rho\mathrm{d}x$ absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, concentrada em $\mathcal{B}$; aqui, ρ é uma função não-negativa Lebesgue-mensurável - a derivada de Radon-Nikodym de μ em relação à medida de Lebesgue.

por

$$G^0 := \frac{\int_{\mathcal{B}} x\rho(x)\mathrm{d}x}{m(\mathcal{B})} \in \mathbb{R}^3. \tag{21}$$

3) Como na situação da distribuição de massa discreta descrita na seção anterior, a evolução temporal do corpo rígido será descrita por uma família $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de *movimentos rígidos*, i.e. para cada $t \in \mathbb{R}$, uma função $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ da forma

$$(\forall x \in \mathbb{R}^3)\, \phi_t(x) = \phi(t,x) = R(t)\cdot x + O(t),$$

onde $R(t)$ é uma curva a valores em $\mathrm{SO}(3)$ com $R(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ e $O(t) = \phi_t(0)$ é uma curva a valores em $\mathbb{R}^3$ com $O(0) = 0$, a qual descreve a evolução temporal da origem[5]. Suporemos que essas curvas sejam diferenciáveis ao menos até segunda ordem.

Como na definição 1, $\omega(t) = \Psi\big(\dot{R}(t)R(t)^{-1}\big)$ é o *vetor velocidade angular* do movimento rígido (onde $\Psi : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ é o isomorfismo linear definido na proposição 2), e $\Omega(t) = R(t)^{-1}\cdot\omega(t) = \Psi\big(R(t)^{-1}\dot{R}(t)\big)$ é o *vetor velocidade angular no referencial atrelado ao corpo* do movimento rígido ϕ_t.

Para obter equações de movimento que determinem a evolução temporal do corpo, encontraremos, como no caso discreto, um sistema de EDO's para a terna $\big(G(t), R(t), \Omega(t)\big)$ com condições iniciais adequadas, onde $G(t) = \phi_t(G^0)$.

4) Considere uma família de movimentos rígidos $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$, com $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(t,x) = \phi_t(x)$, como no item anterior. Pela hipótese assumida no item anterior, ϕ admite derivada parcial com respeito a t até ordem 2, em todo $(t,x) \in \mathbb{R}^3$. Em função de ϕ, definimos:
   a) A *densidade* ou *distribuição de massa* no instante t é a função Riemann-integrável $\rho_t := \rho\circ\phi_t^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Como anteriormente, a partir de ρ_t definimos a massa com respeito à configuração no instante t de $Y \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira de medida nula como sendo $m_t(Y) := \int_Y \rho_t(x)\mathrm{d}x$. Note que, como a derivada de Fréchet de ϕ_t coincide com $R(t)$, o Jacobiano de ϕ_t é dado por

$$\mathsf{J}\,\phi_t = |\det \mathsf{D}\phi_t| = \det R(t) = 1.$$

[5]a ideia subjacente ao nosso modelo é que o "movimento físico" do corpo fica determinado pela família $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$; por exemplo, no instante $t \in \mathbb{R}$, a *configuração* do corpo será $\phi_t(\mathcal{B})$, a posição da ponto do corpo $x \in \mathcal{B}$ na configuração inicial será $\phi_t(x)$, e sua velocidade nesse instante será $\partial_t\phi(t,x)$, etc.

Portanto, pelo teorema de mudança de variáveis, para todo $B \subset \mathcal{B}$ com fronteira de medida nula, tem-se

$$\begin{aligned} m_t\big(\phi_t(B)\big) &= \int_{\phi_t(B)} \rho_t(x)\mathrm{d}x \overset{TMV}{=} \\ &= \int_B \underbrace{\rho_t \circ \phi_t(y)}_{=\rho(y)} \mathsf{J}\,\phi_t(y)\mathrm{d}y = \\ &= \int_B \rho(y)\mathrm{d}y = m(B), \end{aligned}$$

o que significa que a massa é conservada[6] pelo movimento rígido ϕ_t.

b) Dado um ponto x da configuração inicial $\mathcal{B}$, a *posição de x no instante t* e a *velocidade de x no instante t* são dadas por, respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= \phi(t,x) = R(t)\cdot x + O(t), \\ v_t(x) &= \partial_t\phi(t,x) = \dot{R}(t)\cdot x + \dot{O}(t) = \\ &= \dot{R}(t)R(t)^{-1} \underbrace{R(t)\cdot x}_{=\phi_t(x)-O(t)} + \dot{O}(t) = \\ &= \omega(t) \times \big(\phi_t(x) - O(t)\big) + \dot{O}(t) = \\ &= R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times x\big) + \dot{O}(t). \end{aligned} \tag{22}$$

Por conveniência, usaremos a mesma nomenclatura para todo $x \in \mathbb{R}^3$, não necessariamente na configuração inicial $\mathcal{B}$. O campo de vetores $v_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ assim definido chama-se *campo de velocidades*[7] do corpo rígido.

Em particular, (22) se aplica para $x = G^0$, donde se conclui que, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \phi_t(x) - G(t) &= R(t)\cdot(x - G^0), \\ v_t(x) - \dot{G}(t) &= \omega(t)\times\big(\phi_t(x) - G(t)\big) = \\ &= R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times(x - G^0)\big). \end{aligned} \tag{23}$$

---

[6] nossa definição de ρ_t foi cunhada de forma a valer a conservação da massa; usando a linguagem da teoria da medida e integração, a medida $\rho_t\mathrm{d}x$ coincide com *pushforward* de $\rho\mathrm{d}x$ por ϕ_t.

[7] Emprestando uma nomenclatura usual em *Mecânica dos Fluidos*, o campo v_t assim definido é o *campo de velocidades lagrangiano*. A composta $v_t \circ \phi_t^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chama-se *campo de velocidades euleriano*; para cada $y \in \mathbb{R}^3$, o campo euleriano em y é o campo lagrangiano v_t calculado no ponto $x = \phi_t^{-1}(y)$ da configuração inicial cuja posição no instante t é $\phi_t(x) = y$.

c) A *energia cinética* do corpo rígido no instante t é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(t) &:= \frac{1}{2}\int_{\phi_t(\mathcal{B})} \|v_t \circ \phi_t^{-1}(y)\|^2 \rho_t(y)\mathrm{d}y \overset{\text{TMV}}{=} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \|v_t(x)\|^2 \rho(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{24}$$

d) Generalizando (7), definimos o *momento angular total em relação a $P = P(t)$*, onde $P(t)$ é uma curva derivável até segunda ordem a valores em $\mathbb{R}^3$, por

$$\begin{aligned}L_P(t) &:= \int_{\phi_t(\mathcal{B})} \big(y - P(t)\big) \times \big(v_t \circ \phi_t^{-1}(y) - \dot{P}(t)\big)\mathrm{d}y \overset{\text{TMV}}{=} \\ &= \int_{\mathcal{B}} \big(\phi_t(x) - P(t)\big) \times \big(v_t(x) - \dot{P}(t)\big)\rho(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{25}$$

Em particular, para $P(t) = G(t)$, o *momento angular total em relação ao centro de massa* é dado por, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}L_G(t) &:= \int_{\mathcal{B}} \big(\phi_t(x) - G(t)\big) \times \big(v_t(x) - \dot{G}(t)\big)\rho(x)\mathrm{d}x \overset{(23)}{=} \\ &= \int_{\mathcal{B}} R(t) \cdot \big[(x - G^0) \times \big(\Omega(t) \times (x - G^0)\big)\big]\rho(x)\mathrm{d}x \overset{*}{=} \\ &= R(t) \cdot \int_{\mathcal{B}} (x - G^0) \times \big(\Omega(t) \times (x - G^0)\big)\rho(x)\mathrm{d}x = \\ &= R(t)\, \mathcal{I}_{G^0} \cdot \Omega(t),\end{aligned} \tag{26}$$

onde $(*)$ se justifica pela linearidade da integral e $\mathcal{I}_{G^0} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o operador linear, chamado de *operador de inércia* do corpo rígido em relação a G^0, no sentido da seguinte

Definição 4. *Para cada ponto $y \in \mathbb{R}^3$ (destaquemos os casos $y = 0$ ou $y = G^0$, i.e. a origem ou a posição inicial do centro de massa), definimos o operador linear $\mathcal{I}_y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por, para todo $v \in \mathbb{R}^3$,*

$$\mathcal{I}_y \cdot v := \int_{\mathcal{B}} (x - y) \times (v \times (x - y))\rho(x)\mathrm{d}x. \tag{27}$$

Chamamos $\mathcal{I}_y$ de operador de inércia relativo a *y do corpo rígido $\mathcal{B}$. Para $y = 0$, usaremos a notação $\mathcal{I}$ no lugar de $\mathcal{I}_0$.*

Exemplo 1. Calculemos o operador de inércia $\mathcal{I} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ do corpo rígido cilíndrico cuja configuração inicial é $\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, -h \leq z \leq h\}$, dados $r, h > 0$, com densidade constante $\rho = 1$.

Para todos $p, v \in \mathbb{R}^3$, temos

$$p \times (v \times p) = \|p\|^2 v - \langle p, v\rangle p.$$

Portanto, denotando por (e_1, e_2, e_3) a base canônica, temos:

$$\mathcal{I} \cdot e_1 = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2 + z^2) e_1 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \int_{\mathcal{B}} x(x, y, z) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z. \tag{28}$$

Note que:

- $\int_{\mathcal{B}} y^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{\mathcal{B}} x^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 2h \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos^2 \theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho = 2\pi h r^4/4$.
- $\int_{\mathcal{B}} z^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \pi r^2 \int_{-h}^{h} z^2 \mathrm{d}z = 2\pi r^2 h^3/3$.
- Por simetria, as integrais $\int_{\mathcal{B}} xy \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, $\int_{\mathcal{B}} xz \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ e $\int_{\mathcal{B}} yz \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ são nulas.

Substituindo-se em (28), obtemos

$$\mathcal{I} \cdot e_1 = (2\pi h r^4/4 + 2\pi r^2 h^3/3) e_1.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \cdot e_2 &= \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2 + z^2) e_2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \int_{\mathcal{B}} y(x, y, z) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \\ &= (2\pi h r^4/4 + 2\pi r^2 h^3/3) e_2, \\ \mathcal{I} \cdot e_3 &= \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2 + z^2) e_3 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \int_{\mathcal{B}} z(x, y, z) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \\ &= \pi h r^4 e_3. \end{aligned}$$

Conclui-se, pois, que a matriz de $\mathcal{I}$ na base canônica é dada por

$$[\mathcal{I}] = \begin{pmatrix} \frac{\pi h r^4}{2} + \frac{2\pi r^2 h^3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi h r^4}{2} + \frac{2\pi r^2 h^3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pi h r^4 \end{pmatrix}.$$

Proposição 5. *Com a notação acima, o operador de inércia $\mathcal{I}_y$ é auto-adjunto e positivo semidefinido. Além disso, se existir um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ tal que $\rho > 0$ em $\mathcal{U}$, então $\mathcal{I}_y$ é positivo definido.*

O argumento da prova, abaixo, é o mesmo do caso discreto, substituindo-se os somatórios por integrais.

Demonstração. Para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$, usando a identidade do duplo produto vetorial (15) e a linearidade da integral, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}_y \cdot v, w \rangle &= \int_{\mathcal{B}} \langle (x - y) \times \big(v \times (x - y)\big), w \rangle \rho(x) \mathrm{d}x = \\ &= \int_{\mathcal{B}} \big(\langle x - y, x - y \rangle \langle v, w \rangle - \langle x - y, v \rangle \langle x - y, w \rangle \big) \rho(x) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

e o integrando do último membro acima é simétrico em v e w, de modo que a integral acima também coincide com $\langle v, \mathcal{I}_y \cdot w \rangle$, mostrando que $\mathcal{I}_y$ é auto-adjunto.

Além disso, para $v = w$, obtém-se

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{I}_y \cdot v, v\rangle &= \int_{\mathcal{B}} \big(\langle x-y, x-y\rangle\langle v, v\rangle - \langle x-y, v\rangle\langle x-y, v\rangle\big)\rho(x)\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\mathcal{B}} \|(x-y)\times v\|^2 \rho(x)\mathrm{d}x \geq 0,\end{aligned}$$

pois o integrando é ≥ 0, mostrando que $\mathcal{I}_y$ é positivo semidefinido.

Além disso, se $\langle \mathcal{I}_y \cdot v, v\rangle = \int_{\mathcal{B}} \|(x-y)\times v\|^2\rho(x)\mathrm{d}x = 0$, então $\|(x-y)\times v\|^2\rho(x) \equiv 0$ em $\mathcal{U}$, logo $(x-y)\times v = 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$. Tomando-se $x, x' \in \mathcal{U}$ tais que $x - y$ e $x' - y$ sejam linearmente independentes (certamente existem, pois $\mathcal{U}$ é aberto), conclui-se que $v = 0$, provando que $\mathcal{I}_y$ é positivo definido, como afirmado. □

Em particular, existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $\mathcal{I}_y$, e os seus autovalores são todos ≥ 0 (estritamente, no caso em que $\mathcal{I}_y$ for positivo definido).

Definição 5. *Com a notação acima, os autovalores e autovetores de $\mathcal{I}_y$ são chamados, respectivamente,* momentos principais *e* direções principais *de inércia do corpo rígido, relativamente a y.*

Exercício 2. *Enuncie e demonstre uma versão do teorema de Steiner para o operador de inércia definido no contexto de distribuições de massa contínuas, cf. proposição 4 no caso discreto.*

Proposição 6. *Com a notação acima, a energia cinética no instante $t \in \mathbb{R}$ é dada por*

$$\mathrm{K}(t) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{I}_{G^0} \cdot \Omega(t), \Omega(t)\rangle + \frac{1}{2}m(\mathcal{B})\|\dot{G}(t)\|^2.$$

Demonstração. De (24) e de (23), tem-se:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \|v_t(x)\|^2 \rho(x)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \langle R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times(x-G^0)\big)+\dot{G}(t), R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times(x-G^0)\big)+\dot{G}(t)\rangle\rho(x)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \langle R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times(x-G^0)\big), R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times(x-G^0)\big)\rangle\rho(x)\mathrm{d}x + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \|\dot{G}(t)\|^2\rho(x)\mathrm{d}x + \\
&\quad + \int_{\mathcal{B}} \langle R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times(x-G^0)\big), \dot{G}(t)\rangle\rho(x)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \langle \Omega(t)\times(x-G^0), \Omega(t)\times(x-G^0)\rangle\rho(x)\mathrm{d}x + \\
&\quad + \frac{1}{2}m(\mathcal{B})\|\dot{G}(t)\|^2 + \\
&\quad + \langle R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times \underbrace{\int_{\mathcal{B}}(x-G^0)\rho(x)\mathrm{d}x}_{=m(\mathcal{B})(G^0-G^0)=0}\big), \dot{G}(t)\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \langle \Omega(t), (x-G^0)\times\big(\Omega(t)\times(x-G^0)\big)\rangle\rho(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m(\mathcal{B})\|\dot{G}(t)\|^2 = \\
&= \frac{1}{2}\langle \Omega(t), \int_{\mathcal{B}} (x-G^0)\times\big(\Omega(t)\times(x-G^0)\big)\rho(x)\mathrm{d}x\rangle + \frac{1}{2}m(\mathcal{B})\|\dot{G}(t)\|^2 = \\
&= \frac{1}{2}\langle \Omega(t), \mathcal{I}_{G^0}\cdot\Omega(t)\rangle + \frac{1}{2}m(\mathcal{B})\|\dot{G}(t)\|^2.
\end{aligned}
$$

□

Encontraremos, agora, equações de movimento para o corpo rígido. De (26), tem-se, para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$L_G(t) = R(t)\,\mathcal{I}_{G^0}\cdot\Omega(t).$$

Portanto, derivando-se ambos os membros, obtém-se, para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_G}{dt}(t) &= \dot{R}(t)\,\mathcal{I}_{G^0}\cdot\Omega(t) + R(t)\,\mathcal{I}_{G^0}\cdot\dot{\Omega}(t) = \\
&= R(t)\cdot\big(R(t)^{-1}\dot{R}(t)\,\mathcal{I}_{G^0}\cdot\Omega(t) + \mathcal{I}_{G^0}\cdot\dot{\Omega}(t)\big) = \\
&= R(t)\cdot\big(\Omega(t)\times\mathcal{I}_{G^0}\cdot\Omega(t) + \mathcal{I}_{G^0}\cdot\dot{\Omega}(t)\big).
\end{aligned}
$$

Denotemos por $\mathrm{F}_{\mathsf{ext}}$ e $\mathrm{T}_{\mathsf{ext}}$, respectivamente, a resultante das forças externas e o torque resultante das forças externas com respeito ao centro de massa no instante $t\in\mathbb{R}$. Como no caso da distribuição de massa discreta, assumiremos que as funções $\mathrm{F}_{\mathsf{ext}} = \mathrm{F}_{\mathsf{ext}}(t,R,\Omega,G,\dot{G})$ e $\mathrm{T}_{\mathsf{ext}} = \mathrm{T}_{\mathsf{ext}}(t,R,\Omega,G,\dot{G})$ sejam suficientemente regulares (digamos, basta que sejam de classe C^1) de modo a valer o teorema de existência e unicidade para o sistema abaixo, e que o operador de inércia $\mathcal{I}_{G^0}$ seja definido positivo (é o caso, por exemplo, se valer a hipótese da proposição 5). Então a terna $\big(G(t), R(t), \Omega(t)\big)$ é a única solução do sistema de EDO's

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{G} = \frac{1}{m(\mathcal{B})}\,\mathrm{F}_{\mathsf{ext}}(t, R, \Omega, G, \dot{G}) \\ \dot{R} = R\Psi^{-1}(\Omega) \\ \mathcal{I}_{G^0} \cdot \dot{\Omega} + \Omega \times \big(\mathcal{I}_{G^0} \cdot \Omega\big) = R^{-1} \cdot \mathrm{T}_{\mathsf{ext}}(t, R, \Omega, G, \dot{G}) \end{array} \right. \tag{29}$$

com condições iniciais $G(0) = G^0$, $\dot{G}(0)$, $R(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ e $\Omega(0)$. Recorde que $\Psi : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ é o isomorfismo linear definido na proposição 2. Além disso, note que, como o operador de inércia $\mathcal{I}_{G^0}$ definido positivo, em particular é inversível, de modo que podemos multiplicar os dois membros da última equação por $\mathcal{I}_{G^0}^{-1}$ e escrever $\dot{\Omega}$ como função de $t, R, \Omega, G, \dot{G}$, i.e. a equação pode ser colocada na forma normal e (29) é de fato um sistema de EDO's na forma normal para o qual o teorema de existência e unicidade pode ser aplicado.

O movimento rígido ϕ_t fica univocamente determinado, pois, pelas equações 29 com as condições iniciais dadas; chamamos tais equações de *equações de movimento* do corpo rígido $\mathcal{B}$.

Finalmente, note que, no caso de um sistema livre, a última equação se desacopla do sistema e se escreve

$$\mathcal{I}_{G^0} \cdot \dot{\Omega} + \Omega \times \big(\mathcal{I}_{G^0} \cdot \Omega\big) = 0, \tag{30}$$

conhecida como *equação de Euler* para o corpo rígido.

As forças externas atuantes sobre o corpo rígido podem ser “pontuais” ou “distribuídas”; as últimas podem ser de volume ou de superfície[8].

Por exemplo, suponha que o corpo rígido se movimente sob ação do campo gravitacional. Digamos, sendo $0 \in \mathbb{R}^3$ o centro da Terra, podemos modelar a força exercida pelo campo gravitacional como sendo dada pela “densidade de força” (com respeito à massa) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$(\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})\, f(x) = -\frac{GM}{\|x\|^2}\frac{x}{\|x\|} = -\frac{GM}{\|x\|^3}x \in \mathbb{R}^3,$$

onde G é a constante universal gravitacional e M a massa da Terra (que estamos assumindo concentrada em p para simplificar). A força externa exercida no instante $t \in \mathbb{R}$ na porção do corpo que na configuração

[8] precisamente, podemos modelar as “forças pontuais” como medidas de Dirac a valores em $\mathbb{R}^3$; as “forças de volume” como medidas borelianas absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, também a valores em $\mathbb{R}^3$; e as “forças de superfície” como medidas borelianas com suporte em alguma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$, a valores em $\mathbb{R}^3$.

inicial é dada por $B \subset \mathcal{B}$ (com fronteira de medida nula) é:

$$\int_{\phi_t(B)} f(y)\rho_t(y)\mathrm{d}y \overset{\mathrm{TMV}}{=} \int_B f\big(R(t)\cdot(x-G^0)+G(t)\big)\rho(x)\mathrm{d}x.$$

Em particular, a resultante das forças externas que atua no corpo no instante t é dada por

$$\int_{\mathcal{B}} f\big(R(t)\cdot(x-G^0)+G(t)\big)\rho(x)\mathrm{d}x.$$

Analogamente, o torque resultante das forças externas com respeito ao centro de massa no instante $t \in \mathbb{R}$ é dado por

$$\int_{\phi_t(\mathcal{B})} \big(y-G(t)\big)\times f(y)\rho_t(y)\mathrm{d}y \overset{\mathrm{TMV}}{=}$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \big(R(t)\cdot(x-G^0)\big)\times f\big(R(t)\cdot(x-G^0)+G(t)\big)\rho(x)\mathrm{d}x.$$

Portanto, no caso do exemplo em questão, as funções $\mathrm{F}_{\mathsf{ext}} = \mathrm{F}_{\mathsf{ext}}(t,R,\Omega,G,\dot{G})$ e $\mathrm{T}_{\mathsf{ext}} = \mathrm{T}_{\mathsf{ext}}(t,R,\Omega,G,\dot{G})$ que intervêm em (29) são dadas por:

$$\mathrm{F}_{\mathsf{ext}}(t,R,\Omega,G,\dot{G}) = \int_{\mathcal{B}} f\big(R\cdot(x-G^0)+G\big)\rho(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{T}_{\mathsf{ext}}(t,R,\Omega,G,\dot{G}) = \int_{\mathcal{B}} \big(R\cdot(x-G^0)\big)\times f\big(R\cdot(x-G^0)+G\big)\rho(x)\mathrm{d}x.$$

1. Caso de um corpo rígido com um ponto fixo.

Como no caso de distribuição de massa discreta, caso o movimento rígido admita um ponto fixo, as equações de movimento ficam mais simples se considerarmos o momento angular total em relação a esse ponto. Fazendo-se uma translação do sistema de coordenadas, se necessário, assumiremos que o ponto fixo é a origem. Usando (18), obtém-se as mesmas fórmulas do caso discreto, as quais serão deixadas como exercício. Ou seja,

1) A energia cinética é dada por, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{K}(t) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{I}\cdot\Omega(t), \Omega(t)\rangle.$$

2) O momento angular total em relação à origem é dado por, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$L(t) = R(t)\,\mathcal{I}\cdot\Omega(t).$$

3) Assumindo que $\mathcal{I}$ seja definido positivo, $\big(R(t),\Omega(t)\big)$ é a única solução do sistema de EDO's de primeira ordem

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{R} = R\Psi^{-1}(\Omega) \\ \mathcal{I}\cdot\dot{\Omega} + \Omega\times\big(\mathcal{I}\cdot\Omega\big) = R^{-1}\cdot\mathrm{T}_{\mathsf{ext}}(t,R,\Omega) \end{array}\right. \tag{31}$$

com condições iniciais $R(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ e $\Omega(0)$.