Geometric Measure Theory

Gláucio Terra

Departamento de Matemática
IME - USP

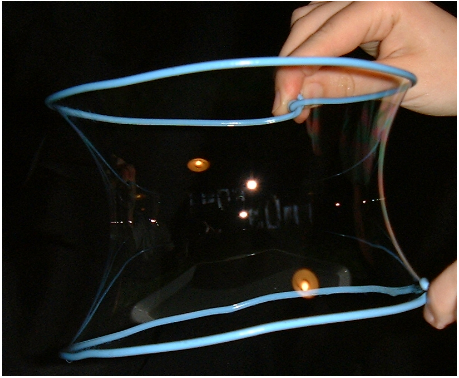
August 5, 2019

Ao Prof. Plinio Amarante Quirino Simões

(in memoriam)

Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

Problema de Plateau



O método direto do Cálculo das Variações

1. Encontre uma sequência de superfícies cujas áreas decrescem para o ínfimo.
2. Extraia uma subsequência “convergente”.
3. Mostre que a superfície limite tem área mínima

O método direto do Cálculo das Variações

Theorem

Sejam X espaço topológico Hausdorff e $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $E_\alpha := \{E \leq \alpha\}$ é compacto ou sequencialmente compacto. Então E assume mínimo em X.

Proof.

- Podemos supor $E \not\equiv +\infty$. Se X sequencialmente compacto: seja $\alpha_0 := \inf\{E(x) \mid x \in X\} \in [-\infty, \infty)$.
- Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. em X tal que $E(x_n) \downarrow \alpha_0$.
- Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \alpha_0$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subset E_\alpha$.
- Pela compacidade sequencial de E_α, existe $(x_{n_j})_j$ subsequência convergente de $(x_n)_n$; digamos $x_{n_j} \to x_0$.
- Como E é s.c.i., $E(x_0) \leq \liminf E(x_{n_j}) = \alpha_0$, logo $E(x_0) = \alpha_0$. Em particular, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é o mínimo de E.

O método direto do Cálculo das Variações

Theorem

Sejam X espaço topológico Hausdorff e $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $E_\alpha := \{E \leq \alpha\}$ é compacto ou sequencialmente compacto. Então E assume mínimo em X.

Proof.

- Podemos supor $E \not\equiv +\infty$. Se X sequencialmente compacto: seja $\alpha_0 := \inf\{E(x) \mid x \in X\} \in [-\infty, \infty)$.
- Tome $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. em X tal que $E(x_n) \downarrow \alpha_0$.
- Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \alpha_0$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subset E_\alpha$.
- Pela compacidade sequencial de E_α, existe $(x_{n_j})_j$ subsequência convergente de $(x_n)_n$; digamos $x_{n_j} \to x_0$.
- Como E é s.c.i., $E(x_0) \leq \liminf E(x_{n_j}) = \alpha_0$, logo $E(x_0) = \alpha_0$. Em particular, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é o mínimo de E.

O método direto do Cálculo das Variações

Theorem

Sejam X espaço topológico Hausdorff e $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $E_\alpha := \{E \leq \alpha\}$ é compacto ou sequencialmente compacto. Então E assume mínimo em X.

Proof.

- Podemos supor $E \not\equiv +\infty$. Se X sequencialmente compacto: seja $\alpha_0 := \inf\{E(x) \mid x \in X\} \in [-\infty, \infty)$.
- Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. em X tal que $E(x_n) \downarrow \alpha_0$.
- Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \alpha_0$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subset E_\alpha$.
- Pela compacidade sequencial de E_α, existe $(x_{n_j})_j$ subsequência convergente de $(x_n)_n$; digamos $x_{n_j} \to x_0$.
- Como E é s.c.i., $E(x_0) \leq \liminf E(x_{n_j}) = \alpha_0$, logo $E(x_0) = \alpha_0$. Em particular, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é o mínimo de E.

O método direto do Cálculo das Variações

Theorem

Sejam X espaço topológico Hausdorff e $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $E_\alpha := \{E \leq \alpha\}$ é compacto ou sequencialmente compacto. Então E assume mínimo em X.

Proof.

- Podemos supor $E \not\equiv +\infty$. Se X sequencialmente compacto: seja $\alpha_0 := \inf\{E(x) \mid x \in X\} \in [-\infty, \infty)$.
- Tome $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. em X tal que $E(x_n) \downarrow \alpha_0$.
- Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \alpha_0$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subset E_\alpha$.
- Pela compacidade sequencial de E_α, existe $(x_{n_j})_j$ subsequência convergente de $(x_n)_n$; digamos $x_{n_j} \to x_0$.
- Como E é s.c.i., $E(x_0) \leq \liminf E(x_{n_j}) = \alpha_0$, logo $E(x_0) = \alpha_0$. Em particular, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é o mínimo de E.

O método direto do Cálculo das Variações

Theorem

Sejam X espaço topológico Hausdorff e $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $E_\alpha := \{E \leq \alpha\}$ é compacto ou sequencialmente compacto. Então E assume mínimo em X.

Proof.

- Podemos supor $E \not\equiv +\infty$. Se X sequencialmente compacto: seja $\alpha_0 := \inf\{E(x) \mid x \in X\} \in [-\infty, \infty)$.
- Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. em X tal que $E(x_n) \downarrow \alpha_0$.
- Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \alpha_0$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subset E_\alpha$.
- Pela compacidade sequencial de E_α, existe $(x_{n_j})_j$ subsequência convergente de $(x_n)_n$; digamos $x_{n_j} \to x_0$.
- Como E é s.c.i., $E(x_0) \leq \liminf E(x_{n_j}) = \alpha_0$, logo $E(x_0) = \alpha_0$. Em particular, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é o mínimo de E.

O método direto do Cálculo das Variações

Theorem

Sejam X espaço topológico Hausdorff e $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $E_\alpha := \{E \leq \alpha\}$ é compacto ou sequencialmente compacto. Então E assume mínimo em X.

Proof.

- Podemos supor $E \not\equiv +\infty$. Se X sequencialmente compacto: seja $\alpha_0 := \inf\{E(x) \mid x \in X\} \in [-\infty, \infty)$.
- Tome $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. em X tal que $E(x_n) \downarrow \alpha_0$.
- Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \alpha_0$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subset E_\alpha$.
- Pela compacidade sequencial de E_α, existe $(x_{n_j})_j$ subsequência convergente de $(x_n)_n$; digamos $x_{n_j} \to x_0$.
- Como E é s.c.i., $E(x_0) \leq \liminf E(x_{n_j}) = \alpha_0$, logo $E(x_0) = \alpha_0$. Em particular, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é o mínimo de E.

Para que as hipóteses do teorema acima se verifiquem:

- A topologia de X deve ser suficientemente fraca para garantir a compacidade dos subníveis E_α;
- A topologia de X deve ser suficientemente forte para garantir E s.c.i.

De Giorgi: teoria dos conjuntos de perímetro finito (conjuntos de Caccioppoli).

Federer e Fleming: teoria das correntes normais e integrais.

Almgren e Allard: varifolds.

De Giorgi: teoria dos conjuntos de perímetro finito (conjuntos de Caccioppoli).

Federer e Fleming: teoria das correntes normais e integrais.

Almgren e Allard: varifolds.

De Giorgi: teoria dos conjuntos de perímetro finito (conjuntos de Caccioppoli).

Federer e Fleming: teoria das correntes normais e integrais.

Almgren e Allard: varifolds.

De Giorgi: teoria dos conjuntos de perímetro finito (conjuntos de Caccioppoli).

Federer e Fleming: teoria das correntes normais e integrais.

Almgren e Allard: varifolds.

- Nas três abordagens acima, é relativamente fácil obter teoremas de existência no contexto do problema de Plateau e afins.
- O estudo da regularidade das soluções fracas encontradas é bem mais delicado.

- Nas três abordagens acima, é relativamente fácil obter teoremas de existência no contexto do problema de Plateau e afins.
- O estudo da regularidade das soluções fracas encontradas é bem mais delicado.

- F. ALMGREN, *Questions and answers about area-minimizing surfaces and geometric measure theory*, in Differential geometry: partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990), vol. 54 of Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 29–53.
- C. DE LELLIS, *The regularity of minimal surfaces in higher codimension*, in Current developments in mathematics 2014, Int. Press, Somerville, MA, 2016, pp. 153–229.
- L. AMBROSIO, *The Caccioppoli-De Giorgi theory of perimeters and its more recent developments*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl., 21 (2010), pp. 275–286.

- W. H. FLEMING, *Early developments ingeometric measure theory*. `https://www.brown.edu/academics/applied-mathematics/sites/brown.edu.academics.applied-mathematics/files/uploads/Wendell-Ziemer-Finished6-25-18.pdf`, 2018.
- T. TORO, *Geometric measure theory—recent applications*, Notices Amer. Math. Soc., 66 (2019), pp. 474–481.
- Frank Morgan, *Geometric measure theory*, fifth ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2016, A beginner's guide, Illustrated by James F. Bredt.

References I

- L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, Taylor & Francis, 1991.
- F. Maggi, *Sets of finite perimeter and geometric variational problems: An introduction to geometric measure theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2012.
- Leon Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 3, Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

References II

Pertti Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Fractals and rectifiability.