

MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Lista 11 – Integral de Bochner (opcional)

Fixemos um espaço de medida completo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta lista.

As duas primeiras questões foram enunciadas na lista 6 (exercícios complementares 1 e 2).

Questão 1-) Sejam Y espaço metrizável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis $X \rightarrow Y$ que converge μ -q.s. para $f : X \rightarrow Y$. Então f é mensurável.

DEFINIÇÃO 1 (funções simples). Sejam (Y, τ_Y) espaço topológico e $f : X \rightarrow Y$. Diz-se que f é *simples* se for mensurável e tiver imagem finita.

Questão 2-) Sejam (Y, τ_Y) espaço metrizável e separável. Se $f : X \rightarrow Y$ for mensurável, existe uma sequência de funções simples $X \rightarrow Y$ que converge pontualmente para f . OBSERVAÇÃO. aqui o espaço de medida não precisa ser completo.

Questão 3-) Sejam Y espaço de Banach (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $A(\mu, Y) \doteq \{f : X \rightarrow Y \text{ mensurável} : \exists Z \subset Y \text{ subespaço separável com } \mu(f^{-1}(Y \setminus Z)) = 0\}$. Então $A(\mu, Y)$ é um $\mathbb{K}$ -subespaço vetorial de Y^X .

DEFINIÇÃO 2. Com a notação acima, os elementos de $A(\mu, Y)$ chamam-se *funções mensuráveis com imagem essencialmente separável*.

Questão 4-) Sejam Y espaço de Banach e $A(\mu, Y)$ como acima. Mostre que:

- $A(\mu, Y)$ é fechado por convergência μ -q.s., i.e. se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec A(\mu, Y)$ converge μ -q.s. para $f : X \rightarrow Y$, então $f \in A(\mu, Y)$.
- Para toda $f \in A(\mu, Y)$, existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções simples $X \rightarrow Y$ que converge μ -q.s. para f e, $(\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}) \|\phi_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$.

DEFINIÇÃO 3. Sejam Y espaço de Banach e $f \in A(\mu, Y)$. Definimos $\|f\|_1 \doteq \int \|f\| d\mu$.

Note que $\|f\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, portanto a definição faz sentido.

DEFINIÇÃO 4. Dado Y espaço de Banach, definimos $L^1(\mu, Y) \doteq \{f \in A(\mu, Y) : \|f\|_1 < \infty\}$.

Questão 5-) Com a notação acima, $L^1(\mu, Y)$ é $\mathbb{K}$ -subespaço vetorial de $A(\mu, Y)$ e $\|\cdot\|_1 : L^1(\mu, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma seminorma. O subespaço $N \doteq \{f \in L^1(\mu, Y) : \|f\|_1 = 0\}$ coincide com o subconjunto de $A(\mu, Y)$ formado pelas funções nulas quase sempre. O quociente $L^1(\mu, Y)/N$ com a norma induzida é completo, i.e. um espaço de Banach.

NOTAÇÃO. Usaremos, como é de praxe, a mesma notação $L^1(\mu, Y)$ para o quociente.

Com a notação das definições e questões anteriores, dados Y espaço de Banach e $f \in L^1(\mu, Y)$, gostaríamos de definir a integral de f , $\int f d\mu$, como sendo um elemento de Y . A ideia natural é defini-la como sendo um elemento $\ell \in Y$ tal que $(\forall \alpha \in Y^*) \langle \alpha, \ell \rangle = \int \alpha \circ f d\mu$, caso exista um tal elemento; se existir, será único pelo teorema de Hahn-Banach. Para provar a existência, use o roteiro proposto na questão abaixo:

Questão 6-) Com a notação acima, tem-se:

- Dada $f \in L^1(\mu, Y)$, defina $\sigma(f) : Y^* \rightarrow \mathbb{K}$ por $\langle \alpha, \sigma(f) \rangle \doteq \int \alpha \circ f d\mu$. Então $\sigma(f)$ está bem definida e é linear contínua, i.e. $\sigma(f) \in Y^{**}$. Fica bem definida, pois, $\sigma : L^1(\mu, Y) \rightarrow Y^{**}$.
- Dada $f \in L^1(\mu, Y)$, verifique que $\sigma(f) : Y^* \rightarrow \mathbb{K}$ é $\sigma(Y^*, Y)$ -contínua (i.e. contínua em Y^* com a topologia fraca-*). SUGESTÃO: Este é o ponto delicado do argumento. Siga o seguinte subroteiro:
 - Redução: pode-se assumir Y separável.
 - $\sigma(f) : Y^* \rightarrow \mathbb{K}$ é sequencialmente $\sigma(Y^*, Y)$ -contínua (use o teorema da convergência dominada; a dominação será feita com o uso do princípio da limitação uniforme [PLU]).
 - use o teorema de Krein-Smulian (vide [1], teorema 12.1, página 259, e corolário 12.8, página 161) para concluir que $\sigma(f) : Y^* \rightarrow \mathbb{K}$ é $\sigma(Y^*, Y)$ -contínua.
- Segue do item anterior que a imagem de $\sigma : L^1(\mu, Y) \rightarrow Y^{**}$ está contida em $Y \subset Y^{**}$.

DEFINIÇÃO 5 (integral de Bochner). Com a notação acima, dada $f \in L^1(\mu, Y)$, defina $\int f d\mu \doteq \sigma(f) \in Y$.

Note que $\int f d\mu$ satisfaz $(\forall \alpha \in Y^*) \langle \int f d\mu, \alpha \rangle = \int \langle f, \alpha \rangle d\mu$ e, por Hahn-Banach, é o único elemento de Y com esta propriedade.

Questão 7 (propriedades da integral de Bochner)-) Seja Y espaço de Banach.

- i) $\int \cdot : L^1(\mu, Y) \rightarrow Y$ é linear.
- ii) (DESIGUALDADE TRIANGULAR) $\forall f \in L^1(\mu, Y), \|\int f d\mu\| \leq \int \|f\| d\mu$.
- iii) Sejam $f \in L^1(\mu, Y)$ e Z subespaço fechado de Y tal que $f^{-1}(Y \setminus Z)$ tem medida nula. Então $\int f d\mu \in Z$.
- iv) Sejam Z espaço de Banach e $T : Y \rightarrow Z$ linear contínua. Para toda $f \in L^1(\mu, Y)$, $T \circ f \in L^1(\mu, Z)$ e $\int T \circ f d\mu = T \cdot \int f d\mu$.
- v) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função simples, então $f \in L^1(\mu, Y)$ *see* $(\forall a \in F \setminus \{0\}) \mu(f^{-1}(a)) < \infty$. Em caso afirmativo, e se $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, com $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \prec Y$ e $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \prec \mathcal{M}$, então $\int f = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$.

Questão 8 (teorema da convergência dominada)-) Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^1(\mu, Y)$ convergente μ -q.s. para $f : X \rightarrow Y$ e $g \in L^1(\mu)$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) \|f_n\| \leq g$ μ -q.s. em X . Então $f \in L^1(\mu, Y)$ e $f_n \xrightarrow{L^1} f$; em particular, $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Questão 9- Seja $f : X \rightarrow Y$. São equivalentes:

- i) $f \in L^1(\mu, Y)$.
- ii) existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^1(\mu, Y)$ sequência de funções simples integráveis que converge μ -q.s. para f e $\int \|\phi_n - f\| d\mu \rightarrow 0$.

Em caso afirmativo, tomando $(\phi_n)_n$ como na segunda condição, $\int \phi_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Questão 10- Seja Y espaço de Banach separável. As seguintes σ -álgebras de subconjuntos de Y coincidem:

- i) $\mathcal{B}_Y$.
- ii) $\mathcal{W}_Y \doteq \sigma$ -álgebra induzida por Y^* (recorde a definição da σ -álgebra induzida por uma família de aplicações, c.f. notas da aula 2).
- iii) $\mathcal{B}_{(Y, \sigma(Y, Y^*))}$, i.e. a σ -álgebra de Borel de Y munido da topologia fraca.

SUGESTÃO: É claro que $\mathcal{W}_Y \subset \mathcal{B}_{(Y, \sigma(Y, Y^*))} \subset \mathcal{B}_Y$. Para verificar $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{W}_Y$, tendo em vista que Y é separável ($\therefore$ todo aberto é união enumerável de bolas abertas), é suficiente mostrar que toda bola aberta é mensurável com respeito a $\mathcal{W}_Y$. Para tal, mostre que $\mathcal{W}_Y$ é invariante por translações, e que toda bola aberta centrada na origem é mensurável com respeito a $\mathcal{W}_Y$. Finalmente, para mostrar a última afirmação: tome $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ subconjunto enumerável denso em Y e $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec Y^*$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) \|\lambda_n\| = 1$ e $\langle \lambda_n, x_n \rangle = \|x_n\|$. Verifique¹ que $(\forall x \in Y) \|x\| = \sup\{|\langle \lambda_n, x \rangle| : n \in \mathbb{N}\}$ e conclua que $\|\cdot\|$ é mensurável com respeito a $\mathcal{W}_Y$.

Questão 11- Sejam Y espaço de Banach e $f : X \rightarrow Y$ com imagem essencialmente separável, i.e. tal que $\exists Z \subset Y$ subespaço separável com $f^{-1}(Y \setminus Z)$ nulo. São equivalentes:

- a) f é mensurável, i.e. $f \in A(\mu, Y)$.
- b) $(\forall \alpha \in Y^*) \alpha \circ f$ é mensurável.

SUGESTÃO: É corolário da questão anterior e da proposição 3 das notas da aula 2.

Questão 12 (teorema de Fubini para a integral de Bochner)-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ -finitos e completos, e $(X \times Y, \overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}, \lambda)$ o completamento de $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Sejam E espaço de Banach e $f \in L^1(\lambda, E)$. Então:

- i) para μ -q.t. $x \in X$, $f_x \doteq f(x, \cdot) : Y \rightarrow E$ é Bochner-integrável, i.e. está em $L^1(\nu, E)$, e a função definida μ -quase sempre $x \mapsto \int f_x(y) d\nu(y) \in E$ é Bochner integrável. Enunciado análogo para seções “ f^y ”.

¹agradecimento ao Daniel Tausk por esta sugestão.

ii) A integral de f pode ser calculada fazendo-se integrações iteradas:

$$\int f \, d\lambda = \int \left(\int f_x(y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f^y(x) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

SUGESTÃO: Combine: uma generalização da proposição 2.12 do Folland, o teorema de Fubini-Tonelli para funções escalares, a questão anterior e o teorema de Hahn-Banach.

Referências

- [1] J. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1994.