

MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Lista 9

Fixemos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta lista.

DEFINIÇÃO 1 (modos de convergência). Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X (digamos, a valores em $\mathbb{C}$). Diz-se que:

[P] $(f_n)_n$ converge *pontualmente* para f (NOTAÇÃO: $f_n \xrightarrow{p} f$) se $\forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[U] $(f_n)_n$ converge *uniformemente* para f (NOTAÇÃO: $f_n \xrightarrow{u} f$) se $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[AE] $(f_n)_n$ converge *quase sempre* para f (NOTAÇÃO: $f_n \rightarrow f \mu a.e.$) se $\exists N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N^c) = 0$ e $f_n \xrightarrow{p} f$ em N , i.e. se $\exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) = 0, \forall \epsilon > 0, \forall x \in N, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[L $^\infty$] $(f_n)_n$ converge *em L^∞* para f (NOTAÇÃO: $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$) se $\exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) = 0, f_n \xrightarrow{u} f$ em N .

[AU] $(f_n)_n$ converge *quase uniformemente* para f (NOTAÇÃO: $f_n \xrightarrow{a.u.} f$) se $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) < \epsilon$ e $f_n \xrightarrow{u} f$ em N .

[L 1] $(f_n)_n$ converge *em L^1* para f (NOTAÇÃO: $f_n \xrightarrow{L^1} f$) se $\int |f_n - f| \rightarrow 0$.

[M] $(f_n)_n$ converge *em medida* para f (NOTAÇÃO: $f_n \xrightarrow{m} f$) se $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0$.

Questão 1-) $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ *see* $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) < \epsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Questão 2-) $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$ *see* $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) = 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Questão 3-) $f_n \xrightarrow{m} f$ *see* $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) < \epsilon$.

Questão 4-) Se $f_n \rightarrow f \mu a.u.$, então $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ e $f_n \xrightarrow{m} f$.

Questão 5-) Se $f_n \rightarrow f \mu a.e.$ e a convergência é dominada, então $f_n \xrightarrow{a.u.} f$.

Questão 6-) Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X . Diz-se que $f_n \rightarrow f$ em L^1 *rapidamente* se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_1 < \infty$. Prove que, se este for o caso, então $f_n \xrightarrow{a.u.} f$.

Questão 7-) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável. Então:

a) $\forall s \in \mathbb{R}, \tau_s f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\tau_s f(x) \doteq f(x - s)$ é Lebesgue mensurável e $\int \tau_s f(x) dm(x) = \int f(x) dm(x)$ se $f \in L^+$ ou f integrável.

b) $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mu_r f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\mu_r f(x) \doteq f(r^{-1}x)$ é Lebesgue mensurável e $\int \mu_r f(x) dm(x) = |r| \int f(x) dm(x)$ se $f \in L^+$ ou f integrável.

Questão 8-) Sejam X conjunto e $f : X \rightarrow [0, \infty]$. Defina a soma não ordenada de f como na questão 2 da lista 7, i.e. $\sum_X f \doteq \sup\{\sum_{x \in F} f(x) : F \subset X \text{ finito}\}$ (ou, equivalentemente, pela definição da lista 8). Mostre que $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\mu(A) \doteq \sum_A (f|_A)$ é uma medida. Note que, como casos particulares, obtém-se a medida de contagem (f constante e igual a 1) e a medida de Dirac centrada em $x_0 \in X$ (f igual a 1 em x_0 e 0 no complementar). SUGESTÃO: Use a questão 2 da lista 7 e a questão 14) da seção 2.2 (também na lista 7).

Questão 9-) Na questão anterior, verifique que:

a) μ é semifinita *see* $(\forall x \in X) f(x) < \infty$.

b) μ é σ -finita *see* for semifinita e $\{x \in X : f(x) > 0\}$ for enumerável.

Questão 10-) Seja $(\mu_i)_{i \in I}$ uma família de medidas em $(X, \mathcal{M})$. Defina $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ por $\mu(E) \doteq \sum_{i \in I} \mu_i(E)$. Mostre que μ é uma medida e, $\forall f \in L^+, \int f d\mu = \sum_{i \in I} \int f d\mu_i$. SUGESTÃO: Lembre que a soma não ordenada é a integral com respeito à medida de contagem. Verifique a σ -aditividade em duas etapas: 1) vale a aditividade finita; 2) vale a continuidade para cima (use o teorema da conv. monótona), e isso implica, pelo ex. 11 da lista 3, a σ -aditividade.

Questão 11-) Seja $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de medidas $\mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) \mu_n \leq \mu_{n+1}$ (i.e. $\forall E \in \mathcal{M}, \mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$). Defina $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ por $\mu(E) \doteq \lim \mu_n(E)$. Então μ é uma medida e, $\forall f \in \mathcal{L}^+, \int f d\mu = \lim \int f d\mu_n$.

Questão 12-) Dê exemplos de sequências $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções mensuráveis em X tais que:

1. $(f_n)_n$ converge quase uniformemente, mas não converge em $\mathcal{L}^1$.
2. $(f_n)_n$ converge em medida, mas não converge μ -q.s.
3. $(f_n)_n$ converge μ -q.s., mas não converge quase uniformemente.

1 Seção 2.4

32-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito. Dadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis, defina:

$$\rho(f, g) \doteq \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$$

Então, identificando funções que coincidem q.s., ρ define uma métrica no conjunto das funções mensuráveis e $f_n \rightarrow f$ com respeito a esta métrica **see** $f_n \rightarrow f$ em medida.

33-) Se $f_n \geq 0$ e $f_n \rightarrow f$ em medida, então $\int f \leq \liminf \int f_n$.

34-) Suponha $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1$ e $f_n \rightarrow f$ em medida. Então:

- (a) $\int f = \lim \int f_n$.
- (b) $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{L}^1$.

35-) $f_n \rightarrow f$ em medida **see** $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq N) \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \epsilon$.

36-) Se $(\forall n \in \mathbb{N}) \mu(E_n) < \infty$ e $\chi_{E_n} \rightarrow f$ em $\mathcal{L}^1$, então f coincide q.s. com a função característica de um conjunto mensurável.

37-) Sejam $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis e $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

- (a) Se ϕ for contínua e $f_n \rightarrow f$ q.s., então $\phi \circ f_n \rightarrow \phi \circ f$ q.s.
- (b) Se ϕ for uniformemente contínua e $f_n \rightarrow f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida), então $\phi \circ f_n \rightarrow \phi \circ f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida).

38-) Suponha $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ em medida.

- (a) $(f_n + g_n) \rightarrow f + g$ em medida.
- (b) $f_n g_n \rightarrow f g$ em medida se $\mu(X) < \infty$, mas não necessariamente se $\mu(X) = \infty$.

39-) Se $f_n \rightarrow f$ quase uniformemente, então $f_n \rightarrow f$ q.s. e em medida.

40-) No teorema de Egorov, a hipótese “ $\mu(X) < \infty$ ” pode ser substituída por “ $|f_n| \leq g$, onde $g \in \mathcal{L}^1$ ”.

41-) Se μ é σ -finita e $f_n \rightarrow f$ q.s., existem mensuráveis $E_1, E_2, \dots \subset X$ tais que $\mu((\cup_1^\infty E_n)^c) = 0$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em cada E_n .

42-) Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Então $f_n \rightarrow f$ em medida **see** $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

43-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito e $f : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $(\forall x \in X) f(x, \cdot)$ seja contínua e $(\forall y \in [0, 1]) f(\cdot, y)$ seja mensurável.

- (a) Dados $0 < \epsilon, \delta < 1$, $E_{\epsilon, \delta} \doteq \{x \in X : |f(x, y) - f(x, 0)| \leq \epsilon \text{ para } y < \delta\}$ é mensurável.
- (b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E^c) < \epsilon$ e $f(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot, 0)$ uniformemente em E quando $y \rightarrow 0$.

44-) (TEOREMA DE LUSIN) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset [a, b]$ tal que $m([a, b] \setminus K) < \epsilon$ e $f|_K$ é contínua.