

MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Lista 8

Questão 1-) Sejam μ e ν medidas num espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$. Mostre que, $(\forall f \in L^+) \int f d(\mu + \nu) = \int f d\mu + \int f d\nu$. Conclua que $L^1(\mu + \nu) = L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$.

Questão 2-) Sejam $\phi : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ aplicação mensurável, μ medida em $(X, \mathcal{M})$ e $\phi_*\mu$ o pushforward de μ por ϕ . Mostre que, para toda f em $L^+(Y, \mathcal{N})$, $\int f d(\phi_*\mu) = \int f \circ \phi d\mu$. Conclua que, para toda $f \in L^1(\phi_*\mu)$, $f \circ \phi \in L^1(\mu)$ e vale a mesma igualdade entre as integrais.

Questão 3-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $\bar{\mu}$ o completamento de μ . Mostre que $L^1(\mu) \equiv L^1(\bar{\mu})$.

DEFINIÇÃO 1 (soma não ordenada). Sejam X um conjunto e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Diz-se que f é *somável* se existir $z \in \mathbb{C}$ tal que, $\forall \epsilon > 0, \exists F_0 \subset X$ finito, $\forall F \supset F_0$ finito, $|\sum_{x \in F} f(x) - z| < \epsilon$. Se existir tal z , ele é único e se chama *soma não ordenada* de f (NOTAÇÃO: $\sum_X f$).

OBSERVAÇÃO. Alternativamente, pode-se definir a noção de somabilidade e a soma não ordenada através da seguinte condição equivalente à usada na definição acima: tome $\mathcal{F} \doteq \{A \subset X : A \text{ finito}\}$, ordenado pela inclusão; então $\mathcal{F}$ é um conjunto dirigido e $(\sum_{x \in A} f(x))_{A \in \mathcal{F}}$ é um net a valores em $\mathbb{C}$ (chamado *net das somas parciais de f*), e f é somável no sentido da definição acima, com soma $z \in \mathbb{C}$, *see* o net em questão converge para z .

Questão 4-) Com a notação da definição acima, dada $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, f é somável se, e somente se, for integrável com respeito à medida de contagem; em caso afirmativo, a soma não ordenada e a integral de f com respeito à medida de contagem coincidem.

Questão 5-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $Y \doteq \{\varphi : X \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ simples e integrável}\}$. Então Y é denso em $L^1(\mu)$.

Questão 6-) Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ com μ medida de Lebesgue-Stieltjes. Tem-se:

- (i) $\tilde{Y} \doteq \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ simples integrável da forma } \sum_{i=1}^n a_i \chi_{I_i}, \text{ com } (\forall i) I_i \text{ intervalo aberto}\}$ é denso em $L^1(\mu)$
- (ii) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ contínua tal que } \text{supp } f \doteq \overline{\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}} \subset \subset \mathbb{R}\}$ (i.e. o conjunto das funções contínuas com suporte compacto) é denso em $L^1(\mu)$.

Questão 7-) Sejam $[a, b]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $C^0([a, b], \mathbb{C}) \doteq \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ contínua}\}$ e

$$\|\cdot\|_1 : C^0([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow [0, \infty) \\ f \mapsto \int_a^b |f(x)| dx$$

Então $(C^0([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado e seu completamento é $(L^1([a, b], \mathcal{B}_{[a, b]}, m), \|\cdot\|_1)$.

SUGESTÃO: Tome $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrável, de modo que

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

é um elemento de $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ e use (ii) da questão anterior.

Questão 8-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : X \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $(\forall z \in \mathcal{U}) f(\cdot, z) \in L^1$, $(\forall x \in X) f(x, \cdot)$ é holomorfa. Suponha que exista $g \in L^1$ tal que $(\forall z \in \mathcal{U}) |\partial_z f(x, z)| \leq g(x)$. Então $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(z) \doteq \int f(x, z) d\mu(x)$ é holomorfa e, $(\forall z \in \mathcal{U}) F'(z) = \int \partial_z f(x, z) d\mu(x)$.

Questão 9-) (função Γ) Sejam $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } z > 0$ e $f_z : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_z(t) \doteq t^{z-1} e^{-t}$, onde $t^{z-1} = \exp[(z-1) \log t]$.

- (i) $(\forall z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0) f_z \in L^1(0, \infty)$.
- (ii) $\Gamma : \{\text{Re } z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\Gamma(z) \doteq \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ é holomorfa.
- (iii) $(\forall z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0) \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. **SUGESTÃO:** Integre por partes $\int_\epsilon^N t^z e^{-t} dt$, faça $\epsilon \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$.
- (iv) Use o item anterior para estender Γ a uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{n : n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \leq 0\}$. Verifique que $\Gamma(1) = 1$ e, portanto, $(\forall n \in \mathbb{N}) \Gamma(n+1) = n!$.

1 Seção 2.3

29-) (i) Mostre que $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ diferenciando a identidade $\int_0^\infty e^{-tx} dx = 1/t$.

(ii) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = (2n)! \sqrt{\pi} / 4^n n!$ diferenciando a identidade $\int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2} dx = \sqrt{\pi/t}$.

30-) Mostre que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k x^n (1 - k^{-1}x)^k dx = n!$.

31-) Expanda o integrando numa série e justifique a integração termo a termo para obter as seguintes fórmulas (o exercício 29 pode ser útil):

(a) Para $a > 0$, $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos ax dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$.

(b) Para $a > -1$, $\int_0^1 x^a (1-x)^{-1} \log x dx = -\sum_1^\infty (a+k)^{-2}$.

(c) Para $a > 1$, $\int_0^\infty x^{a-1} (e^x - 1)^{-1} dx = \Gamma(a) \zeta(a)$, onde $\zeta(a) = \sum_1^\infty n^{-a}$.

(d) Para $a > 1$, $\int_0^\infty e^{-ax} x^{-1} \sin x dx = \arctan(a^{-1})$.