MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798
Lista 7

Questão 1-) (prop. 2.16, cor. 2.17 e prop. 2.20) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida.

(i) Se $f \in \mathsf{L}^+$, então $\int f = 0$ *see* $f = 0$ a.e.

(ii) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathsf{L}^+$ e $f_n \nearrow f$ a.e., então $\int f_n \to \int f$.

(iii) Se $f \in \mathsf{L}^+$ e $\int f < \infty$, então $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ é um conjunto nulo e $\{x \in X : f(x) > 0\}$ é σ-finito.

Questão 2-) Sejam $(X, \mathcal{M} = 2^X, \mu)$, onde μ é a medida de contagem, e $f : X \to [0, \infty]$. Então $f \in \mathsf{L}^+$ e $\int f = \sup\{\sum_{x\in F} f(x) : F \subset X$ finito$\}$. Ou seja, a integral de f com respeito à medida de contagem coincide com a *soma não ordenada* de f.

Questão 3-) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em $\overline{\mathbb{R}}$, ambas limitadas inferiormente (ou superiormente) por um número real.

(i) $\inf a_n + \inf b_n \leqslant \inf(a_n + b_n) \leqslant \inf a_n + \sup b_n \leqslant \sup(a_n + b_n) \leqslant \sup a_n + \sup b_n$.

(ii) $\liminf a_n + \liminf b_n \leqslant \liminf(a_n + b_n) \leqslant \liminf a_n + \limsup b_n \leqslant \limsup(a_n + b_n) \leqslant \limsup a_n + \limsup b_n$.

(iii) Se $(a_n)_n$ for convergente, $\liminf(a_n + b_n) = \lim a_n + \liminf b_n$ e $\limsup(a_n + b_n) = \lim a_n + \limsup b_n$.

Questão 4-) Demonstre a proposição 2.23 e os teoremas 2.25 e 2.26.

Questão 5-) Dados $a < b$ reais, considere o espaço de medida $([a, b], \mathcal{L}|_{[a,b]}, m)$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada.

a) $s(f) \doteq \{\int \phi : \phi$ simples e $\phi \leq f\}$ é não-vazio e limitado superiormente em $\mathbb{R}$. Defina $\underline{\int} f \doteq \sup s(f)$. Analogamente, $S(f) \doteq \{\int \phi : \phi$ simples e $\phi \geq f\}$ é não-vazio e limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Defina $\overline{\int} f \doteq \inf S(f)$.

b) f é Lebesgue-mensurável *see* $\underline{\int} f = \overline{\int} f$.

Questão 6-) (teorema 2.28) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Mostre que, se f for Riemman-integrável, então f é Lebesgue-mensurável (e, portanto, Lebesgue-integrável, pois é limitada) e as integrais de Riemann e de Lebesgue de f coincidem.
Sugestão: Para cada partição P de $[a, b]$, $P = (t_j)_0^n$, $a = t_0 < \cdots < t_n = b$, defina $G_P \doteq \sum_1^n M_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}$ e $g_P \doteq \sum_1^n m_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}$, onde $(\forall j) M_j \doteq \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$ e $m_j \doteq \inf\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Definimos $|P| \doteq \max\{(t_j - t_{j-1}) : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Tome $(P_k)_k$ sequência crescente de partições tal que $|P_k| \to 0$. Então existem $g, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $g_{P_k} \nearrow g$ e $G_{P_k} \searrow G$ pontualmente, e $g \leqslant f \leqslant G$ em $(a, b]$. Verifique que $\int_{[a,b]} G \, \mathrm{d}m = \overline{\int_a^b} f$ e $\int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}m = \underline{\int_a^b} f$.

1 Seção 2.2

13-) Seja $(f_n) \prec \mathsf{L}^+$, $f_n \to f$ pontualmente e $\int f = \lim \int f_n < \infty$. Então $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E f = \lim \int_E f_n$. Isto não ocorre, em geral, se $\int f = \lim \int f_n = \infty$.

14-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $f \in \mathsf{L}^+$, e $(\forall E \in \mathcal{M}) \lambda(E) \doteq \int_E f \, \mathrm{d}\mu$. Então λ é uma medida em $\mathcal{M}$ e, para toda $g \in \mathsf{L}^+$, $\int g \, \mathrm{d}\lambda = \int gf \, \mathrm{d}\mu$.

15-) Seja $(f_n) \prec \mathsf{L}^+$ tal que $f_n \searrow f$ pontualmente e $\int f_1 < \infty$. Então $\int f = \lim \int f_n$.

16-) Se $f \in \mathsf{L}^+$ e $\int f < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \infty$ e $\int_E f > (\int f) - \epsilon$.

17-) Assuma o lema de Fatou e demonstre a partir do mesmo o teorema da convergência monótona.

2 Seção 2.3

18-) O lema de Fatou continua válido se a hipótese $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n \in \mathsf{L}^+$ for substituída por $(\exists g \in \mathsf{L}^+ \cap \mathsf{L}^1, \forall n \in \mathbb{N}) f_n \geqslant -g$. Qual o análogo do lema de Fatou para funções negativas?

19-) Seja $(f_n) \prec \mathsf{L}^1(\mu)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente.

a) Se $\mu(X) < \infty$, então $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$ e $\int f_n \to \int f$.

b) A conclusão do item anterior não vale, em geral, se $\mu(X) = \infty$ (encontre um contra-exemplo em $\mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue).

20-) (Teorema da Convergência Dominada generalizado) Sejam $(f_n), (g_n) \prec \mathsf{L}^1$, $f, g \in \mathsf{L}^1$ tais que $f_n \to f$ q.s. , $g_n \to g$ q.s., $|f_n| \leqslant g_n$ e $\int g_n \to \int g$. Então $\int f_n \to \int f$.

21-) Sejam $f_n, f \in \mathsf{L}^1$ tais que $f_n \to f$ q.s. Então $\int |f_n - f| \to 0$ ***see*** $\int |f_n| \to \int |f|$.

22-) Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Interprete o lema de Fatou, o teorema da convergência monótona e o teorema da convergência dominada em termos de proposições sobre séries infinitas.

23-) Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, defina:

$$H(x) \doteq \lim_{\delta \to 0} \sup_{|y-x| \leqslant \delta} f(y), \quad h(x) \doteq \lim_{\delta \to 0} \inf_{|y-x| \leqslant \delta} f(y).$$

Use o seguinte roteiro para provar que f é Riemann-integrável ***see*** o conjunto $D_f \subset [a, b]$ dos pontos de descontinuidade de f tem medida de Lebesgue 0:

a) $H(x) = h(x)$ ***see*** f contínua em x.

b) Para cada partição P de $[a, b]$, $P = (t_j)_0^n$, $a = t_0 < \cdots < t_n = b$, defina $G_P \doteq \sum_1^n M_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$ e $g_P \doteq \sum_1^n m_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$, onde $(\forall j) M_j \doteq \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$ e $m_j \doteq \inf\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Definimos $|P| \doteq \max\{(t_j - t_{j-1}) : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Tome $(P_k)_k$ sequência crescente de partições tal que $|P_k| \to 0$. Então existem $g, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $g_{P_k} \nearrow g$ e $G_{P_k} \searrow G$ pontualmente, e $g \leqslant f \leqslant G$ em $(a, b]$. Verifique que $h = g$ e $H = G$ q.s., de modo que h e H são Lebesgue-mensuráveis, $\int_{[a,b]} H \, \mathrm{d}m = \overline{\int}_a^b f$ e $\int_{[a,b]} h \, \mathrm{d}m = \underline{\int}_a^b f$.

24-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito e $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ o seu completamento. Se $f : X \to \mathbb{R}$ limitada, então f é $\overline{\mathcal{M}}$-mensurável (e, portanto, pertence a $\mathsf{L}^1(\overline{\mu})$) ***see*** existirem sequências (ϕ_n) e (ψ_n) de funções simples $\mathcal{M}$-mensuráveis tais que $(\forall n) \phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ e $\int (\psi_n - \phi_n) < n^{-1}$. Neste caso, $\lim \int \phi_n \, \mathrm{d}\mu = \lim \int \psi_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\overline{\mu}$.

25-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{-1/2}$ se $0 < x < 1$ e $f(x) = 0$ caso contrário. Seja $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração dos racionais e $g(x) \doteq \sum_1^\infty 2^{-n} f(x - r_n)$.

a) $g \in \mathsf{L}^1(m)$ e, em particular, $g < \infty$ q.s.

b) g é descontínua em todo ponto e ilimitada em todo intervalo.

26-) Se $f \in \mathsf{L}^1(m)$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $F(x) \doteq \int_{-\infty}^x f(t) \, \mathrm{d}t$, então F é contínua.