

MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Lista 4

Questão 1- Sejam μ^* uma medida exterior em X , $E \subset X$ e $\mu^* \llcorner E : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ definida por $A \subset X \mapsto \mu^*(E \cap A)$. Então $\mu^* \llcorner E$ é uma medida exterior em X e $\sigma(\mu^*) \subset \sigma(\mu^* \llcorner E)$.

Exercícios do Folland

Seção 1.4

DEFINIÇÃO 1. Uma *pré-medida* é uma medida numa álgebra.

17-) Sejam μ^* uma medida exterior em X e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos μ^* -mensuráveis disjuntos. Então, para todo $E \subset X$, $\mu^*(E \cap (\cup_1^\infty A_n)) = \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_n)$.

18-) Sejam $\mathcal{A} \subset 2^X$ uma álgebra, \mathcal{A}_σ a coleção de todas as uniões enumeráveis de elementos de \mathcal{A} e $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ a coleção de todas as intersecções enumeráveis de elementos de \mathcal{A}_σ . Sejam μ_0 uma pré-medida em \mathcal{A} e μ^* a medida exterior por ela induzida.

- (a) $\forall E \subset X, \forall \epsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon$.
- (b) Se $\mu^*(E) < \infty$, então E é μ^* -mensurável se, e somente se, existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset B$ e $\mu^*(B \setminus E) = 0$.
- (c) Se μ_0 é σ -finita, a restrição $\mu^*(E) < \infty$ no item anterior é supérflua.

19-) Seja μ^* uma medida exterior em X induzida por uma pré-medida finita μ_0 . Dado $E \subset X$, defina a *medida interior* de E por $\mu_*(E) \doteq \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$. Então E é μ^* -mensurável *see* $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

20-) Sejam μ^* uma medida exterior em X , \mathcal{M}^* a σ -álgebra dos conjuntos μ^* -mensuráveis, $\nu \doteq \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ e ν^* a medida exterior induzida por ν .

- (a) Se $E \subset X$, então $\mu^*(E) \leq \nu^*(E)$, valendo a igualdade *see* existir $A \in \mathcal{M}^*$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(E) = \mu^*(A)$.
- (b) Se μ^* for induzida por uma pré-medida, então $\mu^* = \nu^*$.
- (c) Se $X = \{0, 1\}$, existe uma medida exterior μ^* em X tal que $\mu^* \neq \nu^*$.

21-) [opcional] Sejam μ^* uma medida exterior induzida por uma pré-medida e μ a restrição de μ^* aos conjuntos μ^* -mensuráveis. Então μ é saturada.

22-) [opcional] Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, μ^* a medida exterior induzida por μ , \mathcal{M}^* a σ -álgebra dos conjuntos μ^* -mensuráveis e $\bar{\mu}$ a restrição de μ^* a \mathcal{M}^* .

- (a) Se μ é σ -finita, $\bar{\mu}$ é o completamento de μ .
- (b) Em geral, $\bar{\mu}$ é a saturação do completamento de μ .

23-) Seja \mathcal{A} a coleção de todas as uniões finitas de conjuntos da forma $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, com $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

- (a) \mathcal{A} é uma álgebra em \mathbb{Q} .
- (b) A σ -álgebra gerada por \mathcal{A} é $2^{\mathbb{Q}}$.
- (c) Defina μ_0 em \mathcal{A} por $\mu_0(\emptyset) = 0$ e $\mu_0(A) = \infty$ se $A \neq \emptyset$. Então μ_0 é uma pré-medida em \mathcal{A} e existe mais de uma medida em $2^{\mathbb{Q}}$ que estende μ_0 .

24-) Sejam μ uma medida finita em (X, \mathcal{M}) e μ^* a medida exterior induzida por μ . Suponha que $E \subset X$ (não necessariamente mensurável) satisfaça $\mu^*(E) = \mu^*(X)$.

- (a) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap E = B \cap E$, então $\mu(A) = \mu(B)$.
- (b) Seja $\mathcal{M}_E \doteq \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$; defina $\nu : \mathcal{M}_E \rightarrow [0, \infty]$ por $\nu(A \cap E) \doteq \mu(A)$ (o que é uma boa definição, pelo item anterior). Então \mathcal{M}_E é uma σ -álgebra em E e ν é uma medida em \mathcal{M}_E .