

MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Lista 2

Questão 1-) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$. Uma função f em X é mensurável *see* $(\forall n \in \mathbb{N})$ a restrição de f a $(A_n, \mathcal{M}|_{A_n})$ for mensurável.

Questão 2-) a) Defina $\text{sgn} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\text{sgn}(z) = z/|z|$ se $z \neq 0$ e $\text{sgn}(0) = 0$, de modo que $(\forall z \in \mathbb{C}) z = \text{sgn}(z) \cdot |z|$. Então sgn é mensurável. SUGESTÃO: Use a questão 1 com $A_1 = \{0\}$ e $A_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Então $f = \text{sgn}(f) \cdot |f|$ (esta é a *decomposição polar* de f); f é mensurável *see* $\text{sgn}(f)$ e $|f|$ o forem.

Questão 3 (coproduto de espaços mensuráveis-) Sejam $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços mensuráveis e $X \doteq \dot{\cup}_{\alpha \in A} X_\alpha$. Defina $\mathcal{M} \subset 2^X$ por $\mathcal{M} \doteq \{V \subset X : \forall \alpha \in A, V \cap X_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$. Mostre que:

- (i) $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra em X para a qual todas as inclusões $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$, $\alpha \in A$, são mensuráveis, e é a maior σ -álgebra com esta propriedade (i.e. contém qualquer outra σ -álgebra com esta propriedade).
- (ii) Dado $(Y, \mathcal{N})$ espaço mensurável, uma aplicação $\phi : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ é mensurável *see* $(\forall \alpha \in A) \phi \circ i_\alpha$ for mensurável.

Exercícios do Folland

Seção 1.3

7-) Se $\mu_1, \dots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$, então $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$.

10-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$. Defina $(\forall A \in \mathcal{M}) \mu \llcorner E(A) \doteq \mu(E \cap A)$. Então $\mu \llcorner E$ é uma medida.

13-) Toda medida σ -finita é semi-finita.

Seção 2.1

2-) Sejam $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis.

(a) fg é mensurável (onde $0 \cdot (\pm\infty) \doteq 0$).

(b) Fixe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e defina $h(x) = a$ se $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$ caso contrário. Então h é mensurável.

SUGESTÃO: Mostre que $+, \cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definidas acima são ambas mensuráveis e reaplique o argumento usado com contradomínio $\mathbb{C}$ no lugar de $\overline{\mathbb{R}}$ (prop. 2.6 do Folland). Por exemplo, para verificar que $+$ é mensurável, use a questão 1 com $A_1 \doteq \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\}$ e $A_2 \doteq \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus A_1$.

4-) Se $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $(\forall r \in \mathbb{Q}) f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$, então f é mensurável.

8-) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona, então f é Borel-mensurável.