MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 17`

Questão 1 (desigualdade de Chebyshev)**-)** Sejam, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $0 < p < \infty$ e $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mu)$. Então, para todo $\alpha > 0$,

$$\mu(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \Big(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\Big)^p.$$

Questão 2 (teorema 6.18)**-)** Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e $K : X \times Y \to \mathbb{C}$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável. Suponha que exista $C > 0$ tal que $\int |K(x, y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \leqslant C$ para $q.t.$ $y \in Y$ e $\int |K(x, y)| \, \mathrm{d}\nu(y) \leqslant C$ para $q.t.$ $x \in X$. Então, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e para toda $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\nu)$, a integral

$$Tf(x) \doteq \int K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\nu(y)$$

converge absolutamente para $q.t.$ $x \in X$. Além disso, a função Tf, definida μ-q.s., pertence a $\mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mu)$ e $\|Tf\|_p \leqslant C\|f\|_p$.

Definição 1 (Convolução). Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Borel-mensuráveis (ou, mais geralmente, Lebesgue-mensuráveis, mas suponha Borel-mensuráveis para simplificar), de modo que é Borel-mensurável a aplicação $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por $(x, y) \mapsto f(x - y) g(y)$. Definimos $f * g$ por:

$$f * g(x) \doteq \int f(x - y) g(y) \, \mathrm{d}m(y),$$

para todo x tal que $f(x - \cdot) g(\cdot)$ seja quase-integrável.

Questão 3 (desigualdade de Young)**-)** Se $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$ e, dado $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^n, m)$, então $f * g$ está definida m-q.s., pertence a $\mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^n, m)$ e $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$. Sugestão: Use o teorema 6.18 ou a desigualdade de Minkowski integral.

Questão 4-) Sejam $f, g, h \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$. Então $f * g = g * f \in \mathsf{L}^1$ e $(f * g) * h = f * (g * h) \in \mathsf{L}^1$. Portanto, da questão anterior segue que, munido do produto de convolução, $\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$ é uma álgebra de Banach abeliana.

1 Seção 6.2

17-) Com a notação do teorema 6.14, se μ é semi-finita, $q < \infty$ e $M_q(g) < \infty$, então, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $\{|g| > \epsilon\}$ tem medida finita. Conclua que $S_g = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ é σ-finito.

18-) A reflexividade de L^2 segue da teoria de espaços de Hilbert. Tal fato pode ser usado para demonstrar o teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym através do seguinte argumento, devido a von Neumann. Sejam μ, ν medidas positivas finitas em $(X, \mathcal{M})$ (o caso σ-finito é consequência do caso em que a medida é finita, pelo mesmo argumento usado anteriormente), e seja $\lambda \doteq \mu + \nu$.

(a) O funcional $f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\nu$ é linear contínuo em $\mathsf{L}^2(\lambda)$. Portanto, o teorema de representação de Riesz garante a existência de $g \in \mathsf{L}^2(\lambda)$ tal que $(\forall f \in \mathsf{L}^2(\lambda)) \int f \, \mathrm{d}\nu = \int fg \, \mathrm{d}\lambda$. Equivalentemente, $(\forall f \in \mathsf{L}^2(\lambda)) \int f(1 - g) \, \mathrm{d}\nu = \int fg \, \mathrm{d}\mu$.

(b) $0 \leqslant g \leqslant 1$ λ-q.s., de modo que podemos assumir $0 \leqslant g \leqslant 1$ em toda parte.

(c) Sejam $A \doteq \{x : g(x) < 1\}$ e $B \doteq \{x : g(x) = 1\}$. Defina $\nu_a(E) \doteq \nu(A \cap E)$ e $\nu_s(E) \doteq \nu(B \cap E)$. Então $\nu_s \perp \mu$ e $\nu_a \ll \mu$; de fato, $\mathrm{d}\nu_a = g(1 - g)^{-1} \chi_A \, \mathrm{d}\mu$.

20-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $1 < p < \infty$, $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mu)$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mu)$. Mostre que, se $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty$ e $f_n \to f$ μ-q.s., então $(f_n)_n$ converge para f fracamente (i.e. se q for o conjugado de p, para toda $g \in \mathsf{L}^{\mathsf{q}}$, $\int f_n g \to \int fg$).
Sugestão: Dados $g \in \mathsf{L}^{\mathsf{q}}$ e $\epsilon > 0$: (i) existe $\delta > 0$ tal que $\forall E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \delta$, $\int_E |g|^q < \epsilon$; (ii) existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$ e $\int_{X \setminus A} |g|^q < \epsilon$; (iii) tomando δ como em (i) e A como em (ii), existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\mu(A \setminus B) < \delta$ e $f_n \to f$ uniformemente em B.