

MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Lista 16

Questão 1-) Se $0 < p < q < r \leq \infty$, $L^q \subset L^p + L^r$.

SUGESTÃO: Dada $f \in L^q$, tome $A \doteq \{x \in X : |f(x)| \leq 1\}$ e escreva $f = f\chi_A + f\chi_{A^c}$.

Questão 2-) Se $0 < p < q < r \leq \infty$, $L^p \cap L^r \subset L^q$. Além disso, tomando $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$, tem-se, para toda $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável, $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$.

SUGESTÃO: Basta verificar a desigualdade. Se $r = \infty$, o argumento é direto. Se $0 < p < q < r < \infty$, escreva $\frac{1}{q} = \frac{1}{p/\lambda} + \frac{1}{r/(1-\lambda)}$ e aplique a desigualdade de Hölder generalizada para o produto $|f| = |f|^\lambda |f|^{1-\lambda}$.

Questão 3-) Demonstre as proposições 6.11 e 6.12.

1 Seção 6.1

1-) Quando vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky? (a resposta é diferente se $p = 1$ e $1 < p < \infty$).

2-) Demonstre o teorema 6.8:

- (a) Se f e g forem funções mensuráveis em X , então $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Se $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$, então $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ *see* $|g(x)| = \|g\|_\infty$ q.s. no conjunto onde $f(x) \neq 0$.
- (b) $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em L^∞ .
- (c) $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ *see* $\exists E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E^c) = 0$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em E .
- (d) L^∞ é um espaço de Banach.
- (e) As funções simples são densas em L^∞ .

3-) Se $1 \leq p < r \leq \infty$, $L^p \cap L^r$ é um espaço de Banach com norma $\|f\| \doteq \|f\|_p + \|f\|_r$. Além disso, se $p < q < r$, a inclusão $L^p \cap L^r \rightarrow L^q$ é contínua.

7-) Se $f \in L^p \cap L^\infty$ para algum $p < \infty$, de modo que $f \in L^q$ para todo $q > p$, então $\|f\|_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q$.

8-) Suponha $\mu(X) = 1$ e $f \in L^p$ para algum $p > 0$, de modo que $f \in L^q$ para $0 < q < p$.

- (a) $\log \|f\|_q \geq \int \log |f|$. SUGESTÃO: Use a desigualdade de Jensen com $F = \exp$.
- (b) $(\int |f|^q - 1)/q \geq \log \|f\|_q$, e $\lim_{q \rightarrow 0} (\int |f|^q - 1)/q = \int \log |f|$.
- (c) $\lim_{q \rightarrow 0} \|f\|_q = \exp(\int \log |f|)$.

9-) Seja $1 \leq p < \infty$. Se $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, então $f_n \rightarrow f$ em medida, portanto alguma subsequência de $(f_n)_n$ converge para f q.s. Por outro lado, se $f_n \rightarrow f$ em medida e $(\forall n \in \mathbb{N}) |f_n| \leq g \in L^p$, então $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

10-) Seja $1 \leq p < \infty$. Se $f_n, f \in L^p$ e $f_n \rightarrow f$ q.s., então $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ *see* $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

11-) Seja f uma função mensurável em X . Defina a *imagem essencial* R_f de f por $R_f \doteq \{z \in \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \mu\{x \in X : |f(x) - z| < \epsilon\} > 0\}$.

- (a) R_f é fechado.
- (b) Se $f \in L^\infty$, R_f é compacto e $\|f\|_\infty = \max\{|z| : z \in R_f\}$.

11 - complemento-) Com a notação da questão anterior, mostre que:

- (a) $L^\infty(X)$ é uma álgebra de Banach com unidade (a multiplicação é induzida pelo produto de funções induzido pelo produto de $\mathbb{C}$ e a unidade é a classe de equivalência da função constante e igual a 1).
- (b) $f \in L^\infty$ é inversível *see* $0 \notin R_f$.

13-) $L^p(\mathbb{R}^n, m)$ é separável para $1 \leq p < \infty$. Todavia, $L^\infty(\mathbb{R}^n, m)$ não é separável (mostre que existe um conjunto não-enumerável $\mathcal{F} \subset L^\infty$ tal que $(\forall f \neq g \in \mathcal{F}) \|f - g\|_\infty \geq 1$).

14-) Se $g \in L^\infty$, o operador $T : L^p \rightarrow L^p$ definido por $f \mapsto fg$ é limitado em L^p para $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, $\|T\| \leq \|g\|_\infty$, valendo a igualdade se μ for semi-finita.