

Questão 1 (opcional)-) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Mostre que X é Lebesgue-mensurável.

SUGESTÃO: Mostre que a fronteira ∂X de X tem medida de Lebesgue zero. Para tal, verifique que o interior de $\overline{X}$ coincide com o interior de X , de modo que $\partial \overline{X} = \partial X$. Suponha que $\partial \overline{X} = \partial X$ tenha medida positiva. Note que $\overline{X}$ é um fechado convexo; aplique o teorema de diferenciação de Lebesgue para a função característica de $\overline{X}$ para chegar a uma contradição.

Para verificar que o interior de $\overline{X}$ coincide com o interior de X : é trivial se X estiver contido num subespaço afim próprio de $\mathbb{R}^n$. Se isso não ocorrer, verifique que o interior de X é não vazio (e convexo, mas isso não importa) e aplique o lema abaixo:

LEMA 1. Seja X um convexo de um espaço normado e p um ponto interior de X . Então, para todo q no fecho de X , o segmento aberto $]p, q[$ está contido no interior de X .

1 Seção 3.4

23-) Uma variante útil da função maximal de Hardy-Littlewood é:

$$H^*f(x) \doteq \sup\left\{\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy : B \text{ é uma bola e } x \in B\right\}.$$

Mostre que $Hf \leq H^*f \leq 2^n Hf$.

24-) Se $f \in L^1_{\text{loc}}$ e f é contínua em x , então x pertence ao conjunto de Lebesgue de f .

25-) Seja $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. A densidade $D_E(x)$ de E em x é definida por:

$$D_E(x) \doteq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(E \cap B_r(x))}{m(B_r(x))},$$

sempre que o limite existir.

(a) Mostre que $D_E(x) = 1$ q.s. em E e $D_E(x) = 0$ q.s. em E^c .

(b) Encontre exemplos de E e x tais que $D_E(x) \in (0, 1)$ ou $D_E(x)$ não existe.

2 Seção 3.5

28-) Sejam $F \in \text{NBV}$ e $G(x) \doteq |\mu_F|(-\infty, x]$. Mostre que $G = T_F$ (donde $|\mu_F| = \mu_{T_F}$). Como sugestão, use o seguinte roteiro:

(a) $T_F \leq G$.

(b) $|\mu_F(E)| \leq \mu_{T_F}(E)$ se E for um intervalo e, portanto, se E for um boreliano.

(c) $|\mu_F| \leq \mu_{T_F}$, portanto $G \leq T_F$.

29-) Se $F \in \text{NBV}$ assume valores reais, então $\mu_F^+ = \mu_P$ e $\mu_F^- = \mu_N$, onde P e N são as variações positiva e negativa de F .

30-) Construa uma função crescente $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo conjunto de descontinuidades seja $\mathbb{Q}$.

31-) Sejam $F(x) \doteq x^2 \sin(x^{-1})$ e $G(x) \doteq x^2 \sin(x^{-2})$ para $x \neq 0$, e $F(0) = 0 = G(0)$.

(a) F e G são diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

(b) $F \in \text{BV}([-1, 1])$, mas $G \notin \text{BV}([-1, 1])$.

32-) Se $F_1, F_2, \dots, F \in \text{NBV}$ e $F_n \rightarrow F$ pontualmente, então $T_F \leq \liminf T_{F_n}$.

33-) Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for crescente, então $f(b) - f(a) \geq \int_a^b f'(t) dt$.

34-) Sejam $F, G \in \text{NBV}$ e $-\infty < a < b < \infty$.

(a)

$$\int_{[a,b]} \frac{F(x) + F(x-)}{2} dG(x) + \int_{[a,b]} \frac{G(x) + G(x-)}{2} dF(x) = F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

(b) Se não houver pontos em $[a, b]$ onde F e G sejam ambas descontínuas, então:

$$\int_{[a,b]} F dG + \int_{[a,b]} G dF = F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

35-) Se F e G são absolutamente contínuas em $[a, b]$, então FG também o é e:

$$\int_a^b (FG' + F'G)(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

36-) Seja $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua crescente, $G(a) = c$ e $G(b) = d$.

(a) Se $E \subset [c, d]$ é um boreliano, $m(E) = \mu_G(G^{-1}(E))$.

(b) Se f é Borel-mensurável e integrável em $[c, d]$, então $\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(G(x)) dG(x)$. Em particular, $\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(G(x))G'(x) dx$ se G for absolutamente contínua.

(c) O item anterior não vale, em geral, se G for apenas contínua pela direita.

37-) Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. São equivalentes:

(i) Existe $M \geq 0$ tal que $(\forall x, y \in \mathbb{R}) |F(y) - F(x)| \leq M|y - x|$ (i.e. F é Lipschitziana com constante de Lipschitz M).

(ii) F é absolutamente contínua e $|F'| \leq M$ q.s.

38-) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, considere o gráfico de f como um subconjunto de $\mathbb{C}$ (i.e. identifique $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$). O comprimento L do referido gráfico é, por definição, o supremo dos comprimentos de todas as poligonais inscritas no mesmo.

(a) Seja $F(t) = t + if(t)$; então L é a variação total de F em $[a, b]$.

(b) Se f for absolutamente contínua, $L = \int_a^b [1 + f'(t)^2]^{1/2} dt$.

39-) Seja $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções positivas crescentes em $[a, b]$ tais que $F(x) \doteq \sum_1^\infty F_j(x) < \infty$ para todo $x \in [a, b]$. Então $F'(x) = \sum_1^\infty F'_j(x)$ q.s. em $[a, b]$. SUGESTÃO: Pode-se assumir $F_j \in \text{NBV}$; considere as medidas μ_{F_j} .

42-) Uma função $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) chama-se *convexa* se, $\forall s, t \in (a, b), \forall \lambda \in (0, 1)$,

$$F(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda F(s) + (1 - \lambda)F(t).$$

Geometricamente, isto significa que, $\forall s, t \in (a, b)$, o gráfico de F fica abaixo do segmento que passa por $(s, F(s))$ e $(t, F(t))$.

(a) F é convexa *see* $\forall s, t, s', t' \in (a, b)$ tais que $s \leq s' < t' < t$ e $s < t \leq t'$,

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'}.$$

(b) F é convexa *see* F é absolutamente contínua em todo subintervalo compacto de (a, b) e F' for crescente (no conjunto onde estiver definida).

(c) Se F for convexa e $t_0 \in (a, b)$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $(\forall t \in (a, b)) F(t) - F(t_0) \geq \beta(t - t_0)$.

(d) (DESIGUALDADE DE JENSEN) Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ for um espaço de medida com $\mu(X) = 1$ e $g : X \rightarrow (a, b)$ estiver em $L^1(\mu)$, e se F for convexa em (a, b) , então:

$$F\left(\int g d\mu\right) \leq \int F \circ g d\mu.$$

SUGESTÃO: Ponha $t_0 \doteq \int g d\mu$ e $t \doteq g(x)$ no item anterior e integre.