

1 Seções 3.2 e 3.3

8-) $\nu \ll \mu$ *see* $|\nu| \ll \mu$ *see* $\nu^+ \ll \mu$ e $\nu^- \ll \mu$.

9-) Seja $(\nu_j)_j$ uma sequência de medidas positivas.

(a) Se $(\forall j) \nu_j \perp \mu$, então $\sum_1^\infty \nu_j \perp \mu$.

(b) Se $(\forall j) \nu_j \ll \mu$, então $\sum_1^\infty \nu_j \ll \mu$.

11-) Seja μ uma medida positiva. Uma coleção de funções $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \prec L^1(\mu)$ diz-se *uniformemente integrável* se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\int_E f d\mu| < \epsilon$ para todo $\alpha \in A$ e para todo $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) < \delta$.

(a) Todo subconjunto finito de $L^1(\mu)$ é uniformemente integrável.

(b) Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^1(\mu)$ e $f_n \rightarrow f$ em $L^1(\mu)$, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente integrável.

12-) Para $j = 1, 2$, sejam ν_j, μ_j medidas positivas σ -finitas em $(X_j, \mathcal{M}_j)$ tais que $\nu_j \ll \mu_j$. Então $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ e:

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

13-) Sejam $X = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, m a medida de Lebesgue e μ a medida de contagem em $\mathcal{M}$.

(a) $m \ll \mu$, mas não existe f μ -quase integrável tal que $dm = f d\mu$.

(b) μ não admite decomposição de Lebesgue com respeito a m .

14-) Sejam ν uma medida com sinal arbitrária (não necessariamente σ -finita) e μ uma medida positiva σ -finita em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu \ll \mu$. Então existe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -quase integrável tal que $d\nu = f d\mu$. Como sugestão, use o seguinte roteiro:

(a) É suficiente demonstrar o caso em que μ é finita e ν é positiva.

(b) Com tais hipóteses, existe $E \in \mathcal{M}$ σ -finito para ν tal que $\mu(E) \geq \mu(F)$ para todo $F \in \mathcal{M}$ σ -finito para ν .

(c) O teorema de Radon-Nikodym se aplica em E . Se $F \in \mathcal{M}$ e $F \cap E = \emptyset$, então, ou $\nu(F) = \mu(F) = 0$ ou $\mu(F) > 0$ e $|\nu(F)| = \infty$.

16-) Sejam μ, ν medidas σ -finitas em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu \ll \mu$, $\lambda \doteq \mu + \nu$ e $f \doteq \frac{d\nu}{d\lambda}$. Então $0 \leq f < 1$ μ -q.s. e $\frac{d\nu}{d\mu} = f/(1-f)$.

17-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finito, $\mathcal{N}$ uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{M}$ e $\nu \doteq \mu|_{\mathcal{N}}$. Se $f \in L^1(\mu)$, existe $g \in L^1(\nu)$ (portanto, g é $\mathcal{N}$ -mensurável) tal que $(\forall E \in \mathcal{N}) \int_E f d\mu = \int_E g d\nu$. Se $g' \in L^1(\nu)$ for outra função com a mesma propriedade, então $g = g'$ ν -q.s.; em *teoria da Probabilidade*, g chama-se *expectativa condicional* de f em $\mathcal{N}$.

18-) Sejam ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $f \in L^1(\nu)$. Então $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ e $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$.

19-) Se ν, μ são medidas complexas e λ é uma medida positiva, então $\nu \perp \mu$ *see* $|\nu| \perp |\mu|$, e $\nu \ll \lambda$ *see* $|\nu| \ll \lambda$.

20-) Se ν é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $\nu(X) = |\nu|(X)$, então $\nu = |\nu|$.

21-) Sejam ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $E \in \mathcal{M}$. Defina:

$$\begin{aligned} \mu_1(E) &\doteq \sup\left\{\sum_1^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, (E_j)_1^n \prec \mathcal{M}, E = \cup_1^n E_j\right\} \\ \mu_2(E) &\doteq \sup\left\{\sum_1^\infty |\nu(E_j)| : (E_j)_1^\infty \prec \mathcal{M}, E = \cup_1^\infty E_j\right\} \\ \mu_3(E) &\doteq \sup\left\{\left|\int_E f d\nu\right| : f \in L^1(\nu), |f| \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Então $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = |\nu|$. SUGESTÃO: Mostre que $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$. Para verificar que $\mu_3 = |\nu|$, tome $f \doteq d\nu/d|\nu|$. Para verificar que $\mu_3 \leq \mu_1$, aproxime f por funções simples.