

1 Seção 3.1

1-) Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Se $(E_n)_n \prec \mathcal{M}$ é uma sequência crescente, então $\nu(\cup_1^\infty E_n) = \lim \nu(E_n)$. Se $(E_n)_n \prec \mathcal{M}$ é uma sequência decrescente e $\nu(E_1) < \infty$, então $\nu(\cap_1^\infty E_n) = \lim \nu(E_n)$.

2-) Se ν é uma medida com sinal, $E \in \mathcal{M}$ é ν -nulo *see* $|\nu|(E) = 0$. Além disso, se μ, ν são medidas com sinal, tem-se: $\nu \perp \mu$ *see* $|\nu| \perp \mu$ *see* $\nu^+ \perp \mu$ e $\nu^- \perp \mu$.

3-) Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Tem-se:

(a) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$.

(b) Se $f \in L^1(\nu)$, então $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$.

(c) Se $|\nu|$ for semi-finita, então, para todo $E \in \mathcal{M}$, $|\nu|(E) = \sup\{|\int f d\nu| : f \in L^1(\nu) \text{ e } |f| \leq 1\}$.

4-) Se ν é uma medida com sinal e λ, μ são medidas positivas tais que $\nu = \lambda - \mu$, então $\lambda \geq \nu^+$ e $\mu \geq \nu^-$.

5-) Sejam ν_1 e ν_2 medidas com sinal. Suponha que ambas omitam o valor $+\infty$ ou o valor $-\infty$. Então $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$.

6-) Seja $\nu(E) \doteq \int_E f d\mu$, onde μ é uma medida positiva e f é μ -quase integrável. Descreva as decomposições de Hahn de ν e as variações positiva, negativa e total de ν em termos de f e μ .

7-) Sejam ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$ e $E \in \mathcal{M}$.

(a) $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$ e $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$.

(b) $|\nu|(E) = \sup\{\sum_1^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, (E_j)_1^n \prec \mathcal{M} \text{ e } \cup_1^n E_j = E\}$.