

MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Lista 1

DEFINIÇÃO 1. Sejam X um conjunto e $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset 2^X$. Diz-se que $\mathcal{S}$ é

- um *semi-anel* se for fechado por intersecção finita e se, $\forall A, B \in \mathcal{S}$, a diferença $A \setminus B$ é uma reunião finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$. Note que essa condição e o fato de ser $\mathcal{S} \neq \emptyset$ implicam $\emptyset \in \mathcal{S}$.
- uma *semi-álgebra* se for um semi-anel e se $X \in \mathcal{S}$.
- um *anel* se for fechado por união finita e diferença.
- uma *álgebra* se for um anel e se $X \in \mathcal{S}$.
- um σ -anel se for fechado por união enumerável e diferença.
- uma σ -álgebra se for um σ -anel e se $X \in \mathcal{S}$.
- uma *família elementar* se $\emptyset \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ for fechado por intersecção finita e, $\forall A \in \mathcal{S}$, A^c é uma reunião finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$.

Questão 1-) Sejam X um conjunto e $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset 2^X$. São equivalentes as seguintes afirmações:
 $\mathcal{R}$ é fechada com respeito a:

- a) união finita e diferença (i.e. $\mathcal{R}$ é um *anel*).
- b) união finita e diferença própria.
- c) diferença simétrica e intersecção finita. OBS.: $A \triangle B \doteq A \setminus B \cup B \setminus A = A \cup B \setminus A \cap B$ é a *diferença simétrica* entre A e B .
- d) união finita disjunta, diferença própria e intersecção finita.

Questão 2-) Sejam X um conjunto e $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset 2^X$.

- a) é uma semi-álgebra *see* for fechada por intersecções finitas, $X \in \mathcal{S}$ e, para todo $A \in \mathcal{S}$, o complementar A^c é uma reunião finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$.
- b) $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp. uma σ -álgebra) *see* for fechada por complementação e união finita (resp. união enumerável) *see* for fechada por complementação e intersecção finita (resp. intersecção enumerável).

Questão 3-) $\mathcal{R} \subset 2^X$ é um σ -anel *see* for fechada por união enumerável disjunta, diferença própria e intersecção finita.

Questão 4-) Se $\mathcal{R} \subset 2^X$ é uma álgebra, são equivalentes:

- a) $\mathcal{R}$ é fechado por união enumerável disjunta.
- b) $\mathcal{R}$ é fechado por união enumerável crescente
- c) $\mathcal{R}$ é fechado por intersecção enumerável decrescente.

Em caso afirmativo, $\mathcal{R}$ é uma σ -álgebra.

Questão 5-) Se $\mathcal{S} \subset 2^X$ é um semi-anel (respectivamente, uma semi-álgebra ou, mais geralmente, uma família elementar), a família formada por todas as reuniões disjuntas finitas de elementos de $\mathcal{S}$ coincide com o anel gerado por $\mathcal{S}$ (respectivamente, com a álgebra gerada por $\mathcal{S}$).

Questão 6-) Proposições 1.2 a 1.7 do Folland.

Questão 7 (generalização da prop. 1.5-)) Sejam $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e $X = \prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto. Então $\otimes_{i \in I} \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$; vale a igualdade se X tiver base enumerável de abertos (o que é equivalente a cada X_i ter base enumerável e ser enumerável o conjunto dos $i \in I$ tal que X_i tem mais que um ponto). Como corolário, conclua que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

NOTAÇÃO.

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ para designar uma sequência a valores em $\mathcal{A}$;
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ para designar uma sequência a valores em $\mathcal{A}$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $m \neq n$.

Questão 8-) Sejam $\mathcal{A} \subset 2^X$ uma álgebra e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$.

- (i) Existe $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ tal que $(\forall 1 \leq k \leq \infty) \cup_1^k A_n = \cup_1^k A'_n$.
- (ii) Existe $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente tal que $(\forall 1 \leq k \leq \infty) \cup_1^k A_n = \cup_1^k A'_n$.

1 Exercícios do Folland

1.1 Seção 1.2

1-) Uma classe de conjuntos $\mathcal{R} \subset 2^X$ chama-se *anel* se for fechada por uniões finitas e diferenças (i.e. se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{R}$ então $\cup_1^n E_i \in \mathcal{R}$ e se $E, F \in \mathcal{R}$ então $E - F \in \mathcal{R}$). Um anel fechado por uniões enumeráveis chama-se *σ -anel*.

- (a) Anéis (resp. σ -anéis) são fechados por intersecções finitas (resp. enumeráveis).
- (b) Se $\mathcal{R}$ for um anel (resp. σ -anel), então $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp. σ -álgebra) *see* $X \in \mathcal{R}$.
- (c) Se $\mathcal{R}$ for um σ -anel, então $\{E \subset X : E \in \mathcal{R} \text{ ou } E^c \in \mathcal{R}\}$ é uma σ -álgebra.
- (d) Se $\mathcal{R}$ for um σ -anel, então $\{E \subset X : \forall F \in \mathcal{R}, E \cap F \in \mathcal{R}\}$ é uma σ -álgebra.

3-) Seja $\mathcal{M}$ uma σ -álgebra infinita.

- (a) $\mathcal{M}$ contém uma sequência infinita de conjuntos disjuntos.
- (b) $\text{card}(\mathcal{M}) \geq \mathfrak{c}$.

4-) Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra *see* for fechada por uniões enumeráveis crescentes (i.e. se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ for uma família crescente, então $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$).

5-) Se $\mathcal{M}$ é a σ -álgebra gerada por $\mathcal{E}$, então $\mathcal{M}$ é a união das σ -álgebras $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ geradas pelos subconjuntos enumeráveis $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$.