Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

6 de maio de 2020

Revisão sobre o pushforward de medidas

Definição

Sejam, $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ espaços de medida, $f : X \to Y$ mensurável e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ medida. Então

$$\begin{aligned} f_*\mu : \mathcal{N} &\to [0, \infty] \\ E &\mapsto \mu(f^{-1}E) \end{aligned}$$

é uma medida; chama-se *pushforward* de μ por f.

Revisão sobre o pushforward de medidas

Observação

O push-forward é "functorial":

1. Se $(X, \mathcal{M}) \xrightarrow[\text{mens}]{f} (Y, \mathcal{N}) \xrightarrow[\text{mens}]{g} (Z, \mathcal{O})$ e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ medida. Então

$$(g \circ f)_* \mu = g_*(f_* \mu)$$

(pois, $\forall E \subset Z$, $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1} E)$).

2. Se $f = \mathrm{id}_X$, então $f_* \mu = \mu$.

   Em particular, decorre de 1) e 2) que, se $(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{N})$ for isomorfismo mensurável e μ, ν medidas em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, então $f_* \mu = \nu \Leftrightarrow \mu = (f^{-1})_* \nu$.

Revisão sobre o pushforward de medidas

Notação

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f \in \mathrm{L}^+(X)$. Já sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\to [0, \infty] \\ E &\mapsto \int_E f \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

é uma medida. Denotá-la-emos por $f \, \mathrm{d}\mu$. Assim, se $f = 1$, $\mathrm{d}\mu$ é a própria μ.

Revisão sobre o pushforward de medidas

Proposição (questão 2 da lista 8)

Sejam $(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\phi} (Y, \mathcal{N})$ *mensurável e* $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *medida. Para* $f : Y \to \mathbb{K}$ *mensurável, tem-se:*

(i) *Se* $f \geq 0$*,*

$$\int f d(\phi_* \mu) \stackrel{(*)}{=} \int f \circ \phi \, \mathrm{d}\mu$$

(ii) $f \in \mathrm{L}^1(\phi_* \mu)$ see $f \circ \phi \in \mathrm{L}^1(\mu)$ *e, caso afirmativo, vale a igualdade* $(*)$*.*

Observação (o teorema de mudança de variáveis, bis)

Seja $\phi : \Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomosfismo C^1 sobre $\phi(\Omega)$. Para $E \subset \Omega$ Lebesgue-mensurável, pelo teorema de mudança de variáveis, $\phi(E)$ é Lebesgue-mensurável e

$$m(\phi(E)) = \int_E |\det D\phi(x)| \; \mathrm{d}m(x).$$

Assim, $\forall F \subset \phi(\Omega)$ mensurável, usando ϕ^{-1} no ludar de ϕ

$$(\phi_* m)(F) = m(\phi^{-1}(F)) = \int_F |\det D\phi^{-1}(x)| \; \mathrm{d}m(x)$$

Noutras palavras, tomando

$$(\Omega, \mathcal{L}|_\Omega, m) \xrightarrow{\phi} (\phi(\Omega), \mathcal{L}|_{\phi(\Omega)})$$

tem-se $\boxed{\phi_* m = |\det D\phi^{-1}| \; \mathrm{d}m}$.

Exercício (opcional – para quem já estudou EDO)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* X *um campo de vetores de classe* C^2 *em* Ω *cujo divergente se anule identicamente. Mostre que o fluxo de* X *preserva a medida de Lebesgue, i.e. se* $(\phi_t)_{\in\mathbb{R}}$ *for o grupo local a 1 parâmetro induzido por* X, *então*

$$(\phi_t)_* m = m.$$

Notação

- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ e $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.
- Tome

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} &\to (0, \infty) \times S^{n-1} \\ x &\mapsto \left(|x|, \frac{x}{|x|} \right) \\ \phi^{-1} : (0, \infty) \times S^{n-1} &\to \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ (r, x') &\mapsto r \cdot x' \end{aligned}$$

Então ϕ e ϕ^{-1} são contínuas, i.e. ϕ é um homeomorfismo. Daí,

$$(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}) \xrightarrow{\phi} ((0, \infty) \times S^{n-1}, \mathcal{B}_{(0,\infty) \times S^{n-1}} = \mathcal{B}_{(0,\infty)} \otimes \mathcal{B}_{S^{n-1}})$$

é um isomorfismo mensurável.

Objetivo:

Para m medida de Lebesgue $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \to [0, \infty]$, quero escrever $\phi_* m$ como um produto $\nu \times \sigma$, com $\nu : \mathcal{B}_{(0,\infty)} \to [0, \infty]$ e $\sigma : \mathcal{B}_{S^{n-1}} \to [0, \infty]$ medidas borelianas.

Notação

$$\hat{E} \doteq \phi^{-1}((0,1] \times E) = \{r \cdot x' | 0 < r \leq 1, x' \in E\}.$$

Teorema

Seja $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to (0, \infty) \times S^{n-1}$ *como acima. Então existem, e são únicas, medidas borelianas* $\nu : \mathcal{B}_{(0,\infty)} \to [0, \infty]$ *e* $\sigma : \mathcal{B}_{S^{n-1}} \to [0, \infty]$ *tais que* $\phi_* m = \nu \times \sigma$ *e* $\sigma(S^{n-1}) = n \cdot m(B^n)$*. A saber:* $\nu = r^{n-1}\, \mathrm{d}m(r)$ *e* $\sigma : E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}} \mapsto n \cdot m(\hat{E})$*.*

Corolário

Com a notação do teorema acima:

a) $(\phi^{-1})_*(\nu \times \sigma) = m$

b) *Se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *boreliana com* $f \geq 0$ *ou* $f \in \mathrm{L}^1(m)$, *então:*

$$\int f \,\mathrm{d}m = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \underbrace{f(rx')}_{= f \circ \phi^{-1}(r, x')} r^{n-1} d\sigma(x') \,\mathrm{d}m(r) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(rx') \underbrace{r^{n-1} \,\mathrm{d}m(r)}_{= d\nu(r)} d\sigma(x').$$

Corolário

Com a notação do teorema, sejam $g : [0, \infty) \to [0, \infty]$ *boreliana e* $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *dada por* $f(x) = g(\|x\|)$*. Então:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}m = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr.$$