Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

<https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Departamento de Matemática
IME - USP

6 de maio de 2020

A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

Definição

O espaço de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ é, por definição, o complemento de $(\mathbb{R}^n, \otimes_1^n \mathcal{L}, \prod_1^n m)$.

Notação

Omitimos o “ n ” da notação sempre que não causar confusão.

Observação

Também chamamos de “medida de Lebesgue” a restrição de m^n a $\otimes_1^n \mathcal{L}$ ou a $\otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Proposição

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ é o completamento de $(\mathbb{R}^n, \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \Pi_1^n m)$.

Proposição

Seja $\rho : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ onde $\mathcal{R} \doteq \{\Pi_{i=1}^n I_i : \forall i, I_i \subset \mathbb{R} \text{ intervalo aberto}\}$ e $\rho(\Pi_{i=1}^n I_i) = \Pi_{i=1}^n m(I_i)$. Considere ρ como pré-medida exterior e seja m^* a medida exterior induzida. Então $\mathcal{L}^n = \sigma(m^*)$ e $m^n = m^*|_{\mathcal{L}^n}$.

Propriedades de Regularidade e Densidade

Proposição

$\forall E \in \mathcal{L}^n$:

- (a) $m^n(E) = \inf\{m^n(U) : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \text{ e } U \supset E\} = \sup\{m^n(K) : K \subset E \text{ compacto}\}.$
- (b) $\exists F \in F_\sigma, \exists G \in G_\delta, \exists N_1, N_2 \subset \mathbb{R}^n$ nulos tais que

$$E = F \cup N_1 = G \setminus N_2.$$

Proposição

As funções contínuas $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ com suporte compacto formam um subespaço denso de $L^1(m^n)$.

Teorema (invariância por translações de m^n)

Dado $a \in \mathbb{R}^n$, defina $\tau_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $x \mapsto x + a$.

- (a) Para todo $E \in \mathcal{L}^m$, $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ e $m^n(\tau_a(E)) = m^n(E)$.
- (b) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é $\mathcal{L}^n$ -mensurável, com $f \geq 0$ ou $f \in \mathcal{L}^1$, $f \circ \tau_a$ também o é e $\int f dm^n = \int f \circ \tau_a dm^n$.

Notação

- $GL(n, \mathbb{R}) \doteq \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ linear inversível}\} \subset L(\mathbb{R}^n)$.
- Dada $T \in L(\mathbb{R}^n)$, denotaremos por $[T_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ a sua matriz na base canônica $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$:

$$T \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} \mathbf{e}_i.$$

Proposição (mudança linear de variáveis)

Seja $T \in GL(n, \mathbb{R})$.

- (i) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é Lebesgue-mensurável, $f \circ T$ também o é.
- (ii) Em (i), se $f \geq 0$ ou $f \in L^1$,

$$\int f \, dm = \int f \circ T \, |\det T| \, dm.$$

- (iii) $\forall E \in \mathcal{L}^n$, $T(E) \in \mathcal{L}^n$ e $m(T(E)) = |\det T| \cdot m(E)$.

Definição

Uma aplicação $\phi : \mathcal{U} \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se um difeomorfismo C^1 se for uma aplicação de classe C^1 , injetiva, com $(\forall x \in \mathcal{U})$ $D\phi(x) \in Gl(n, \mathbb{R})$.

Observação

Pelo teorema da função inversa, a condição acima é equivalente a: $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U})$ é de classe C^1 , inversível, com $\phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^1 .

Teorema de Mudança de Variáveis

Teorema

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ difeomorfismo C^1 . Tem-se:

- (i) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é Lebesgue-mensurável, $f \circ \phi$ também o é.
- (ii) Se, em (i), $f \geq 0$ ou $f \in L^1$,

$$\int_{\phi(\Omega)} f \, dm = \int_{\Omega} f \circ \phi(x) \cdot |\det D\phi(x)| \, dm(x).$$

- (iii) Se $E \subset \Omega$ é Lebesgue-mensurável, $\phi(E)$ também o é e

$$m(\phi(E)) = \int_E |\det D\phi(x)| \, dm(x).$$