

Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

<https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Departamento de Matemática
IME - USP

4 de maio de 2020

Teorema de Fubini-Tonelli

Teorema (Tonelli)

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ -finitos e $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável, $f \geq 0$. Então

(1) *as aplicações $X \rightarrow [0, \infty]$ e $Y \rightarrow [0, \infty]$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto \int f_x \, d\nu$ e $y \mapsto \int f^y \, d\mu$ são ambas mensuráveis ($e \geq 0$);*

(2)

$$\int f \, d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f_x \, d\nu \right] d\mu = \int \left[\int f^y \, d\mu \right] d\nu.$$

Teorema de Fubini-Tonelli

Teorema (Fubini)

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ -finitos.

(a) Se $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ for $\mu \times \nu$ -quase integrável, então:

- (1)
- Para μ -q.t. $x \in X$, f_x é quase-integrável e $x \mapsto \int f_x \, d\nu$ é uma função mensurável (definida quase sempre) e quase-integrável.
 - Para ν -q.t. $y \in Y$, f^y é quase-integrável e $y \mapsto \int f^y \, d\mu$ é uma função mensurável e quase-integrável.

(2)

$$\int \left[\int f_x \, d\nu \right] d\mu = \int f \, d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f^y \, d\mu \right] d\nu$$

(b) Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$, então valem (1) e (2) acima substituindo-se “quase-integrável” por “integrável”.

Observação

Os dois teoremas acima são, em geral, aplicados “in tandem”. Tipicamente, dada $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável, queremos calcular $\int f$ via integrais iteradas. A estratégia é:

- (i) Calcule $\int |f|$ por Tonelli.
- (ii) Se $\int |f| < \infty$, aplica-se Fubini para calcular $\int f$, calculando-se integrais iteradas.

Teorema (Fubini para medidas completas)

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ -finitos e completos, e $(X \times Y, \overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}, \lambda)$ o completamento de $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Dada f $\overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ -mensurável e a-) $f \geq 0$ ou b-) $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, tem-se:

(1) *Para μ -q.t. $x \in X$, f_x é $\mathcal{N}$ -mensurável (≥ 0 com a-), $\in \mathcal{L}^1(\nu)$ com b-)), a função definida q.s. $x \mapsto \int f_x d\nu$ é mensurável (≥ 0 com a-) e $\in \mathcal{L}^1(\mu)$ com b-)) e:*

(2)
$$\int \left[\int f_x d\nu \right] d\mu = \int f d\lambda.$$

Enunciado análogo para seções “y”.

Observação

O teorema acima se aplica, em particular, para o completamento de $(\mathbb{R}^n = \prod_1^n \mathbb{R}, \otimes_1^n \mathcal{L}, \prod_1^n m)$, onde $\mathcal{L}$ é a σ -álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e m a medida de Lebesgue em $\mathcal{L}$. Como veremos na próxima seção, tal completamento é o espaço de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$.