Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

29 de abril de 2020

Definição (classe monótona)

Sejam X conjunto, $\mathcal{C} \subset 2^X$. $\mathcal{C}$ diz-se uma *classe monótona* se $\mathcal{C} \neq \emptyset$ e:

(i) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ crescente $\Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$

(ii) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{C}$ decrescente $\Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$

Exemplo

Toda σ-álgebra é uma classe monótona.

Lema da Classe Monótona

Proposição

A intersecção de uma família $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de classes monótonas em X é uma classe monótona se for não-vazia.

Definição

Dado $E \subset 2^X$, a classe monótona gerada por E é a interseção de $\{\mathcal{C} \subset 2^X \text{ classe monótona} \mid E \subset \mathcal{C}\}$. NOTAÇÃO: $\mathcal{C}(E)$.

Lema (Lema da Classe Monótona)

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma álgebra em 2^X. Então $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Proposição

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *espaços de medida* σ*-finitos. Dado* $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*:*

1. *as aplicações* $X \to [0, \infty]$ *e* $Y \to [0, \infty]$ *definidas, respectivamente, por* $x \mapsto \nu(E_x)$ *e* $x \mapsto \mu(E^y)$*, são ambas mensuráveis.*
2. $\int \nu(E_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \mu \times \nu(E) = \int \mu(E^y)\, \mathrm{d}\nu(y)$.