Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

27 de abril de 2020

Notação e Objetivo

Fixemos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ até o final desta aula. Queremos definir uma medida em $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ induzida por μ e ν de forma natural.

Retângulos Mensuráveis

Definição

Seja $\mathcal{R} \doteq \{A \times B \mid A \in \mathcal{M} \text{ e } B \in \mathcal{N}\}$. Os elementos de $\mathcal{R}$ chamam-se *retângulos mensuráveis*.

Proposição

Com a notação acima, $\mathcal{R}$ é uma semi-álgebra.

Demonstração.

Com efeito:

- Se $A \times B \in \mathcal{R}$ e $A' \times B' \in \mathcal{R}$,

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = \underbrace{(A \cap A')}_{\in \mathcal{M}} \times \underbrace{(B \cap B')}_{\in \mathcal{N}} \in \mathcal{R}$$

- $X \times Y \in \mathcal{R}$
- Dado $A \times B \in \mathcal{R}$,

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c) = (A^c \times Y) \dot{\cup} (A \times B^c)$$

$\square$

Corolário

A álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R})$ *gerada por* $\mathcal{R}$ *é dada por:*

$$\mathcal{A} = \{\dot{\cup}_1^n A_i \times B_i \mid (A_i \times B_i)_{1 \leq i \leq n} \prec \mathcal{R}\}$$

Observação

Note que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ (pois $\sigma(\mathcal{R}) \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{R})$).

Definição

$$\pi_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty)$$

$$E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \times B_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i)$$

Proposição

Com a notação acima, π_0 está bem definida e é uma medida em $\mathcal{A}$.

Lema

Seja $A \times B \in \mathcal{R}$ e $(A_i \times B_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{R}$ tal que $A \times B = \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} A_i \times B_i$. Então $\mu(A)\nu(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)\nu(B_i)$.

Como π_0 é uma medida em $\mathcal{A}$, segue do teorema de extensão de Carathéodory que

1. A restrição da medida exterior π^* induzida por π_0 a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{A})$ é uma medida que extende π_0.

Definição

Tal medida chama-se *medida produto* e denota-se por $\mu \otimes \nu = \mu \times \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \to [0, \infty]$.

2. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ forem σ-finitos, π_0 também o é. Nesse caso, pela unicidade dada pelo teorema de extensão de Carathéodory, $\mu \times \nu$ é a única extensão de π_0 a uma medida em $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ ($\therefore$ é a única medida em $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ que, em todo retângulo mensurável $A \times B \in \mathcal{R}$, é dada por $\mu(A)\nu(B)$).

Observação

A mesma contrução pode ser feita para uma sequência finita $\{(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)\}_{1\leq i\leq n}$ de espaços mensuráveis, obtendo-se uma medida

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n \to [0, \infty]$$

tal que

$$\prod_{i=1}^{n} \mu(A_i \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$$

se $(A_1 \times \cdots \times A_n) \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$.

Observação

Valem as relações de associatividade esperadas. Por exemplo, se $\{(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)\}_{1\leq i\leq 3}$, as bijeções:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \times X_2 \times X_3 & \overset{\equiv}{\longrightarrow} & (X_1 \times X_2) \times X_3 & \overset{\equiv}{\longrightarrow} & X_1 \times (X_2 \times X_3) \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & ((x_1, x_2), x_3) & \mapsto & (x_1, (x_2, x_3)) \end{array}$$

induzem isomorfismos mensuráveis

$$\begin{aligned} (X_1 \times X_2 \times X_3, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3) &\equiv ((X_1 \times X_2) \times X_3, (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3) \\ &\equiv (X_1 \times (X_2 \times X_3), \mathcal{M}_1 \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3)) \end{aligned}$$

e, com essas identificações:

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$$

Próximo objetivo:

Investigar integrabilidade e calcular integrais em $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ através de integrais iteradas.

Notação

1. Para $E \subset X \times Y$ e $x \in X$, $y \in Y$

$$E_x \doteq \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} \subset Y$$
$$E^y \doteq \{x \in X \mid (x,y) \in E\} \subset X$$

2. Para $f : X \times Y \to \mathbb{K}$, $x \in X$, $y \in Y$

$$f_x \doteq f(x,\cdot) : Y \to \mathbb{K}$$
$$f^y \doteq f(\cdot,y) : X \to \mathbb{K}$$

Proposição

Com a notação acima:

(a) *Se* $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*:* $\forall x \in X$, $E_x \in \mathcal{N}$ *e* $\forall y \in Y$, $E^y \in \mathcal{M}$.

(b) *Se* $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \to \mathbb{K}$ *é mensurável:* $\forall x \in X$, $f_x : (Y, \mathcal{N}) \to \mathbb{K}$ *é mensurável e* $\forall y \in Y$, $f^y : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{K}$ *é mensurável.*