Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

13 de abril de 2020

Notação

Fixaremos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

Comparação entre as Integrais de Riemann e de Lebesgue

Proposição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada.

(i) *Se f for Riemann-integrável, então f é Lebesgue-integrável e*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}m.$$

(ii) *f é Riemann-integrável* see

$$m(\{x \in [a, b] \mid f \text{ descontínua em } x\}) = 0.$$

Teorema (Derivação sob o Sinal da Integral via TCD)

Sejam: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *espaço de medida,* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo e* $f : X \times I \to \mathbb{R}$ *tal que* $\forall t \in I$, $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. *Defina* $F : I \to \mathbb{R}$ *por* $F(t) := \int f(x, t)\, \mathrm{d}\mu(x)$.

(a) *Suponha que:*
  (i) $\forall x \in X$, $f(x, \cdot) : I \to \mathbb{R}$ *contínua em* $t_0 \in I$.
  (ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *tal que* $\forall (x, t) \in X \times I$, $|f(x, t)| \le g(x)$.

  Então F *é contínua em* t_0.

(b) *Suponha que:*
  (i) $\forall x \in X$, $f(x, \cdot) : I \to \mathbb{R}$ *derivável.*
  (ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *tal que* $\forall (x, t) \in X \times I$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \le g(x).$$

  Então F *é derivável e* $\forall t \in I$,

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Observação

Na parte (a) do teorema anterior, vale um enunciado análogo para a continuidade sequencial de F com o parâmetro t num espaço topológico qualquer.

Definição (Funções mensuráveis no sentido estendido)

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : \operatorname{dom} f \subset X \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$). Diz-se que f é *mensurável no sentido estendido* ou *mensurável definida q.s.* se:

(i) $\operatorname{dom} f \in \mathcal{M}$, $\mu[(\operatorname{dom} f)^c] = 0$.

(ii) $f : (\operatorname{dom} f, \mathcal{M}|_{\operatorname{dom} f}) \to \mathbb{K}$ é mensurável.

Observação

Note que toda função $f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{K}$ mensurável no sentido estendido admite uma extensão mensurável $X \to \mathbb{K}$:

(i) Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ for completo, qualquer extensão de f é mensurável.

(ii) $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ dada por $\tilde{f}|_{\operatorname{dom} f} = f$ e $\tilde{f}|_{(\operatorname{dom} f)^c} = 0$ é mensurável.

Definição

Com a notação da definição acima, seja $f : \mathrm{dom}\, f \to \mathbb{K}$ mensurável no sentido estendido. Diz-se que:

(i) f é quase-integrável se $\tilde{f}$ o for. Em caso afirmativo: $\int f \doteq \int \tilde{f}$. Mais geralmente, $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \doteq \int_E \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_E \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu.$$

(ii) f é integrável se $\tilde{f}$ o for.

Observação

- A integral definida acima independe da extensão pois a integral não enxerga conjuntos de medida nula.
- Daqui em diante, diremos, simplesmente, "mensurável" no lugar de "mensurável no sentido estendido" ou "mensurável definida q.s.".

Definição (norma 1)

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Definimos:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu) &\to [0, \infty) \\ f &\mapsto \|f\|_1 \doteq \int |f| \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Proposição

Com a notação acima, $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$*:*

(i) $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$

(ii) *[desigualdade triangular]:* $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

Definição

Sejam E $\mathbb{K}$-espaço vetorial. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$:

(i) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

$\|\cdot\|$ chama-se uma *seminorma* em E. Diz-se que $\|\cdot\|$ é uma *norma* se for uma seminorma tal que $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. Um *espaço normado* é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\|\cdot\|$ norma em E.

Definição

Um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ diz-se um *espaço de Banach* se for completo com a métrica induzida por $\|\cdot\|$.

Como construir um espaço normado a partir de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de uma seminorma

Proposição

Dados E $\mathbb{K}$-e.v. e $\|\cdot\|$ seminorma em E, $N \doteq \{x \in E \mid \|x\| = 0\}$ é $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de E.

Proposição

Sejam E $\mathbb{K}$-e.v., $\|\cdot\|$ seminorma em E, $N = \{x \in E \mid \|x\| = 0\}$. Então existe uma única norma $\|\cdot\|$ em E/N tal que, para todo $x \in E$, $\|x + N\| = \|x\|$.

A construção acima vale, em particular, dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, para $E = \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\| \cdot \| = \| \cdot \|_1 : \mathcal{L}^1(\mu) \to [0, \infty)$. Nesse caso:

1. $N = \{f \in \mathcal{L}^1(\mu) \mid \|f\|_1 = 0\} = \{f : X \to \mathbb{C}$ mensurável $\mid f = 0$ μ-q.s.$\}$.
2. Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,
$$[f] = f + N = \{g : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável } \mid g = f \ \mu\text{-q.s.}\}.$$
3. $L^1(\mu) \doteq \mathcal{L}^1(\mu)/N$.

Teorema

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Então, $(L^1(\mu), \| \cdot \|_1)$ é um espaço de Banach.

Lema

Se $(E, \|\cdot\|)$ *espaço normado (sobre* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*). São equivalentes:*

(i) $(E, \|\cdot\|)$ *é completo.*

(ii) *Toda série absolutamente convergente em* E *é convergente.*

Notação

Daqui em diante, abandonaremos a notação provisória "$\mathcal{L}^1(\mu)$" e usaremos a mesma notação (sobrecarregada) "$\mathrm{L}^1(\mu)$" para denotar tanto $\mathcal{L}^1(\mu)$ como o quociente $\mathcal{L}^1(\mu)/N$.

- Portanto, com esta convenção, "$f \in \mathrm{L}^1(\mu)$" pode significar, em função do contexto, que f é uma função μ-integrável ou uma classe de equivalência de funções μ-integráveis que coincidem μ-q.s.
- Uma convenção de notação análoga será usada para os espaços $\mathrm{L}^p(\mu)$ a serem definidos mais adiante.

Proposição

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *espaço de medida e* $Y \doteq \{\varphi : X \to \mathbb{C} : \varphi$ *simples e integrável*$\}$. *Então* Y *é denso em* $L^1(\mu)$.

Corolário

Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ *com* μ *medida de Lebesgue-Stieltjes. Tem-se:*

(i) $\tilde{Y} \doteq \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *simples integrável da forma* $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{I_i}$, *com* $(\forall i) I_i$ *intervalo aberto*$\}$ *é denso em* $L^1(\mu)$.

(ii) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *contínua tal que* $\operatorname{spt} f \doteq \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}} \subset\subset \mathbb{R}\}$ *é denso em* $L^1(\mu)$.

Exercício

Sejam $[a, b]$ *intervalo compacto de* $\mathbb{R}$*,*
$C^0([a, b], \mathbb{C}) \doteq \{f : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$ *e*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : C^0([a, b], \mathbb{C}) &\to [0, \infty) \\ f &\mapsto \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Então $\left(C^0([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1\right)$ *é um espaço normado e seu completamento é* $\left(L^1([a, b], \mathcal{B}|_{[a,b]}, m), \|\cdot\|_1\right)$*.*