Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

13 de abril de 2020

Notação

Fixaremos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

Definição (integrais de funções a valores em $\overline{\mathbb{R}}$)

Dada $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, diz-se que:

- f é *quase-integrável* se $\int f^+ < \infty$ ou $\int f^- < \infty$. Nesse caso, $\int f \doteq \int f^+ - \int f^-$.
- f é *integrável* se $\int f^+ < \infty$ e $\int f^- < \infty$.

Proposição

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável é integrável $\Leftrightarrow \int |f| < \infty$.

Definição

$\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \doteq \{f : X \to \mathbb{R} \text{ integrável}\}$.

Proposição

$\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ é $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathbb{R}^X$ e $\int \cdot : \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é linear.

Definição (integrais de funções a valores em $\mathbb{C}$)

Seja $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Diz-se que f é *integrável* se $\int |f| < \infty$.

Proposição

$f : X \to \mathbb{C}$ é integrável $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f : X \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ o forem.

Definição

$\mathcal{L}^1(\mu) \doteq \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ integrável}\}$.

Proposição

$\mathcal{L}^1(\mu)$ é $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathbb{C}^X$ e $\int \cdot : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{C}$ é linear.

Proposição (Desigualdade tringular integral)

Com a notação acima, se $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, então

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema (teorema da convergência dominada de Lebesgue)

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$ *e* $f : X \to \mathbb{C}$ *tais que* $f_n \xrightarrow{p.} f$ *e* $\exists g : X \to [0,\infty] \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *tal que* $(\forall n \in \mathbb{N})\ |f_n| \leq g$*. Então,* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *e* $\int f_n \to \int f$*.*

Exercício

1. *Se* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrável,* $\{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ *é nulo e* $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ *é* σ*-finito.*
2. *Se* $f : X \to \mathbb{C}$ *integrável,* $\{x \in X, f(x) \neq 0\}$ *é* σ*-finito.*

Exercício

A integral "não enxerga conjuntos nulos", i.e.:

(i) *Dadas $f, g : X \to \mathbb{C}$ integráveis, são equivalentes:*

(a) $\int |f - g| = 0$

(b) $\forall E \in \mathcal{M}$, $\int_E f = \int_E g$

(c) $f = g$ μ-q.s.

(ii) *No teorema da convergência dominada, podemos substituir convergência pontual por convergência μ-q.s., i.e. se*

$$\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sequência de funções mensuráveis } X \to \mathbb{C} \\ f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável} \\ f_n \to f \ \mu\text{-q.s.} \\ g \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ e } (\forall n)\ |f_n| \leq g \ \mu\text{-q.s.} \end{cases}$$

então $\int f_n \to \int f$.

Exercício

A integral é compatível com traços:

$$\text{Tome} \begin{cases} E \in \mathcal{M} \\ \mathcal{M}|_E = \{F \in \mathcal{M} | F \subset E\} \\ \mu|_E : \mathcal{M}|_E \to [0, \infty] \\ \qquad\qquad F \mapsto \mu(F) \end{cases}$$

Se $f : X \to \mathbb{C}$ for integrável em E i.e. se $\chi_E \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, então $f|_E \in \mathcal{L}^1(\mu|_E)$ e

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int f|_E \, \mathrm{d}(\mu|_E).$$