

Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

<https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Departamento de Matemática
IME - USP

3 de maio de 2020

Aplicações Mensuráveis

Definição

Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis. Uma aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ diz-se *mensurável* se $\forall B \in \mathcal{B}$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposição

Com a notação acima, sejam $S \subset 2^Y$ e $\mathcal{B} = \sigma(S)$. Para que ϕ seja mensurável basta que, $\forall B \in S$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposição

Sejam

$$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{\psi} (Z, \mathcal{C})$$

aplicações mensuráveis entre espaços mensuráveis. Então $\psi \circ \phi$ é mensurável.

Proposição

Sejam (X, τ_X) , (Y, τ_Y) espaços topológicos e $\phi : X \rightarrow Y$ contínua. Então $\phi : (X, \mathcal{B}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{B}_Y)$ é mensurável.

Convenção

Se (Y, τ_Y) for um espaço topológico, sempre consideraremos Y munido de $\mathcal{B}_Y$, salvo menção explícita em contrário.

Por exemplo, se $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $f : X \rightarrow Y$, dizemos que f é $\mathcal{M}$ -mensurável se $f : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}_Y)$ for mensurável. Em particular:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *Lebesgue-mensurável* $\rightsquigarrow f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mensurável;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *Borel-mensurável* $\rightsquigarrow f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mensurável.

σ -álgebra induzida por uma família de aplicações

Proposição (σ -álgebra induzida por uma família de aplicações)

*Sejam X um conjunto, $(Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços mensuráveis e $(X \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha)_{\alpha \in A}$. Então existe uma menor σ -álgebra $\mathcal{M}$ em X que torna, $\forall \alpha \in A$, f_α mensurável. Além disso, se $(\forall \alpha \in A) \mathcal{A}_\alpha = \sigma(S_\alpha)$,
 $\mathcal{M} = \sigma(\{V \subset X \mid \exists \alpha \in A, \exists D \in S_\alpha, V = f_\alpha^{-1}(D)\})$.*

Definição

A menor σ -álgebra cuja existência é assegurada pela proposição acima chama-se σ -álgebra induzida pela família $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$.

σ -álgebra induzida por uma família de aplicações

Proposição

Com a notação da definição e proposição acima, sejam, $(Z, \mathcal{C})$ espaço mensurável e $\phi : Z \rightarrow Y$

$$(Z, \mathcal{C}) \xrightarrow{\phi} (X, \mathcal{B}) \xrightarrow{f_\alpha} (Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$$

Então $\phi : (Z, \mathcal{C}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ é mensurável se, e somente se, $(\forall \alpha \in A) f_\alpha \circ \phi$ for mensurável.

Operações com Funções Mensuráveis

Proposição

Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis. Então:

- *$f \pm g$ e fg são mensuráveis.*
- *Se g não se anular, f/g é mensurável.*

Operações com Funções Mensuráveis

Proposição

Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis $(X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Então $g_1 \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$, $g_2 \doteq \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$, $g_3 \doteq \overline{\lim} u_n$ e $g_4 \doteq \underline{\lim} u_n$ são mensuráveis.

Corolário

Se $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são mensuráveis.

Corolário

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis $(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ pontualmente convergente para $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Então f é mensurável.

Definição (partes positiva e negativa de uma função)

Sejam $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$$f^+ \doteq \max\{f, 0\}$$

$$f^- \doteq \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\}$$

Note que $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, e que $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável *see* f^+ e f^- o forem.

Observação

Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, a *decomposição polar* de f é $f = (\operatorname{sgn} f) \cdot |f|$, onde $\operatorname{sgn} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é a função mensurável dada por

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Note que f é mensurável *see* $\operatorname{sgn} f$ e $|f|$ o forem.

Definição (função característica)

Sejam X um conjunto e $A \subset X$

$$\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

chama-se *indicatriz* ou *função característica* de A .

Observação

Se $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $A \subset X$, então $A \in \mathcal{A}$ se e só se χ_A mensurável.

Definição (funções simples)

Seja $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável. Uma função em X diz-se *simples* se for uma combinação linear finita, com coeficientes em $\mathbb{C}$, de funções características de mensuráveis, i.e. uma função da forma $\sum_{i=0}^n c_i \chi_{A_i}$, com $(A_i)_{0 \leq i \leq n} \prec \mathcal{A}$.

Ideia:

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $\phi = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{A_i}$ simples. Definiremos

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=0}^n a_i \mu(A_i)$$

e, para $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável, definiremos $\int f d\mu$ aproximando f por funções simples.

Proposição

Sejam $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$. Então, são equivalentes:

- (i) ϕ é simples.*
- (ii) ϕ é mensurável e $\text{Im } \phi$ é finita.*

Demonstração.

- (i) $\Rightarrow$ (ii) é claro.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Seja ϕ mensurável e

$$\text{Im}\phi = \underbrace{\{c_0, c_1, \dots, c_n\}}_{2 \text{ a } 2 \text{ distintos}}$$

Então

$$\phi = \underbrace{\sum_{j=0}^n c_j \chi_{\phi^{-1}(\{c_j\})}}_{(*)}$$

$\therefore \phi$ é simples.



Definição (representação padrão)

Com a notação acima, $(*)$ chama-se *representação padrão* de ϕ .

Corolário

Se f, g simples e $\alpha \in \mathbb{C}$, então $f + g, f \cdot g, \alpha f$ também são simples.

Teorema (Aproximação de funções mensuráveis por funções simples)

Fixe $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável.

- (a) Seja $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mensurável. Existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente de funções simples $X \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\phi_n(x) \nearrow f(x), \forall x \in X$. Além disso, se $A \subset X$ tal que $\text{Im } f|_A$ é limitada em $\mathbb{R}$, então $\phi_n|_A \xrightarrow{u} f|_A$.
- (b) Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável. Existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções simples $X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:
- (i) $(\forall n \in \mathbb{N}) |\phi_n| \leq |\phi_{n+1}| \leq |f|$.
 - (ii) $\phi_n \xrightarrow{p} f$ e, $\forall A \subset X$ tal que $f|_A$ limitado, $\phi_n|_A \xrightarrow{u} f|_A$.

Exercício

Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mensurável, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec (0, \infty)$, $r_n \rightarrow 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} r_i = \infty$. Então, $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que.

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \chi_{A_n} = f$$

Notação

Fixaremos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

Definição

$L^+ \doteq \{f : X \rightarrow [0, \infty] \text{ mensurável}\}.$

Definição (integral de função simples)

Seja $\phi \in L^+$, simples, com representação padrão $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$.
A *integral* de ϕ é

$$\sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \in [0, \infty].$$

Notação

$$\int \phi \, d\mu, \quad \int \phi, \quad \int \phi(x) \, d\mu(x), \quad \int \phi(x) \mu(dx)$$

Definição

Se $A \in \mathcal{M}$ e $\phi \in L^+$,

$$\int_A \phi \, d\mu \doteq \int \chi_A \phi \, d\mu$$

Proposição

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $\phi, \psi \in L^+$ simples, $c \geq 0$.

Então:

- (i) $\int c\phi = c \int \phi$.
- (ii) $\int \phi + \psi = \int \phi + \int \psi$.
- (iii) Se $\phi \leq \psi$, $\int \phi \leq \int \psi$.

Corolário

(i) Se $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n} \prec L^+$, ϕ_i simples, então

$$\int \sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \int \phi_i$$

Basta usar (ii) da proposição anterior e indução sobre n .

(ii) Seja $\phi \in L^+$ simples e $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ (não necessariamente a representação padrão), com $(\forall i) a_i \geq 0$. Então

$$\int \phi = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i)$$

Basta aplicar o item anterior com $\phi_i = a_i \chi_{E_i}$ para $1 \leq i \leq n$.

Proposição

$E \in \mathcal{M} \mapsto \int_E \phi \in [0, \infty]$ é uma medida.

Definição

Para $f \in L^+$

$$\int f = \sup \left\{ \int \phi : \phi \in L^+ \text{ simples, } \phi \leq f \right\} \in [0, \infty]$$

Observação

Se $\phi \in L^+$ simples, a nova definição coincide com a antiga.

Proposição

$\forall f, g \in L^+, \forall c \in [0, \infty):$

(1) $\int cf = c \int f$

(2) Se $f \leq g$, $\int f \leq \int g$

Definição

Se $f \in L^+, A \in \mathcal{M}$

$$\int_A f \doteq \int f \chi_A$$

Definição

Diz-se que $f \in L^+$ é *integrável* (ou *somável*) se $\int f < \infty$.

Teorema (Teorema da convergência monótona)

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^+$ sequência crescente. Então,

$$\int \underbrace{\lim f_n}_{\in L^+} = \lim \int f_n.$$

Corolário

Seja $(f_n)_n$ sequência em L^+ (finita ou infinita). Então:

$$\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n.$$

Teorema (Lema de Fatou)

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^+$. Então

$$\int \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int f_n.$$

Corolário

Se $(f_n)_n \prec L^+$ e $f_n \xrightarrow{p.} f$ (portanto $f \in L^+$),

$$\int f \leq \underline{\lim} \int f_n.$$

Exercício

A integral não enxerga conjuntos de medida nula:

1) Dada $f \in L^+$,

$$\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

2) Dadas $f, g \in L^+$ integráveis, são equivalentes:

(i) $\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f = \int_E g$

(ii) $f = g \text{ } \mu\text{-q.s.}$

3) Nos teoremas de convergência (i.e., TCM, lema de Fatou e TCD, a ser visto) convergência pontual pode ser substituída por convergência μ -q.s.

Exemplo: se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^+, f \in L^+, f_n \nearrow^p f \text{ } \mu\text{-q.s.}$, então $\int f_n \nearrow \int f$.

Exercício

Sejam $(X, \mathcal{M} = 2^X, \mu)$, onde μ é a medida de contagem, e $f : X \rightarrow [0, \infty]$. Então $f \in L^+$ e

$$\int f = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) \mid F \subset X \text{ finito} \right\}.$$

Ou seja, a integral de f com respeito à medida de contagem coincide com a soma não ordenada de f .

Notação

$\sum_X f$ ou $\sum_{x \in X} f(x)$ para $\int f \, d\mu$.

Observação

Em particular, se $X = \mathbb{N}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ coincide com $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.