Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

11 de março de 2020

Definição

Dado (X, τ) espaço topológico, uma *medida boreliana* em X é uma medida $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$.

Objetivo:

Caracterizar as medidas borelianas em $\mathbb{R}$ finitas nos compactos de $\mathbb{R}$, i.e. as medidas de *Radon* em $\mathbb{R}$.

Ideia:

- Seja $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ medida finita. Tome

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mu((-\infty, x]) \end{aligned}$$

- F é crescente e contínua à direita. Isso decorre da monotonicidade e da continuidade para baixo da medida.
- Partiremos de $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita e tentaremos obter uma medida boreliana a partir de F.

Definição (h-intervalos)

Seja $H \doteq \{(a,b] \cap \mathbb{R} | a, b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ e } a \leq b\}$. Os elementos de H chamam-se *h-intervalos*.

- Note que, se $a = b$, o intervalo é o conjunto vazio, logo $\emptyset \in H$. Além disso, H é uma semi-álgebra (em particular, é uma família elementar). Portanto, a álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H)$ gerada por H é dada por

$$\mathcal{A} = \left\{\dot{\cup}_{i=0}^{n} J_i : n \in \mathbb{N}, (J_i)_{0 \leq i \leq n} \prec H\right\}$$

- Tome $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita. Definimos $F(+\infty) \doteq \lim_{n \to +\infty} F(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ e $F(-\infty) \doteq \lim_{n \to -\infty} F(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Pomos:

$$\ell : H \to [0, \infty]$$
$$(a,b] \cap \mathbb{R} \mapsto F(b) - F(a)$$

- Note que ℓ está bem definida, i.e. não ocorre $\infty - \infty$. Além disso, se F for a identidade, ℓ é igual a $b - a$, i.e. o comprimento do intervalo. Quero estender a ℓ a uma medida em $\mathcal{A}$, a qual será subsequentemente estendida a uma medida em $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ através do teorema de extensão de Carathéodory. Defina:

$$\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$
$$\dot{\cup}_{i=0}^{n} J_i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \ell(J_i)$$

- Afirmação: μ_0 está bem definida e é uma medida na álgebra $\mathcal{A}$.
- Pelo teorema de extensão de Carathéodory, existe, pois uma medida $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ que estende μ_0. Isso prova parte do seguinte:

Caracterização das medidas de Radon em $\mathbb{R}$

Teorema

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *crescente e contínua à direita. Então:*

(i) *existe uma única medida boreliana* μ_F *tal que* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a < b$, $\mu_F\big((a, b]\big) = F(b) - F(a)$. *Além disso,*

  a) μ_F *é finita nos compactos*

  b) *Se* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *crescente e contínua à direita* $\mu_F = \mu_G$ *see* $F - G$ *constante.*

(ii) *Reciprocamente, se* $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ *medida finita nas compactos, existe* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *crescente e contínua à direita tal que* $\mu = \mu_F$.

Observação

- A mesma construção feita anteriormente pode ser reproduzida para *h*-intervalos da forma $[a, b) \cap \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à esquerda.
- Dada $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita, seja $\mu_0 : \mathcal{A}(H) \to [0, \infty]$ medida induzida por F. O teorema de extensão de Carathéodory fornece mais que uma medida boreliana $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$, i.e. fornece uma medida $\mu_F : \mathcal{M}_F \doteq \sigma(\mu^*) \to [0, \infty]$ a qual é o completamento de $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ (pois $\mu_0 : \mathcal{A}(H) \to [0, \infty]$ é σ-finita).

Definição (medidas de Lebesgue-Stieltjes)

Com a notação acima, $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ ou $\mu_F : \mathcal{M}_F \to [0, \infty]$ chama-se *medida de Lebesgue-Stieltjes* induzida por F. Se $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$,

- μ_F chama-se *medida de Lebesgue*, e denota-se por m;
- $\mathcal{L} \doteq \mathcal{M}_F$ chama-se σ-álgebra de Lebesgue.

Observação

- Observação: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \underset{\neq}{\subseteq} \mathcal{L} \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{P}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{L}$ é o completamento de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ com respeito a medida de Lebesgue.

Propriedades de regularidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes.

Proposição

Sejam $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *uma medida de Lebesgue-Stieltjes e* $\mu^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ *a medida exterior por ela induzida.*

1. $\forall E \subset \mathbb{R}$, $\mu^* E = \inf\{\mu(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U}$ *aberto e* $E \subset \mathcal{U}\}$.
2. $\forall E \subset \mathbb{R}$, $\exists V \subset \mathbb{R}$ *um* G_δ *tal que* $E \subset V$ *e* $\mu^*(E) = \mu(V)$.
3. $\forall E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K$ *compacto e* $K \subset E\}$.
4. $\forall E \in \mathcal{M}$, $\exists F \subset \mathbb{R}$ *um* F_σ *tal que* $F \subset E$ *e* $\mu(E) = \mu(F)$.

Invariância da Medida de Lebesgue

Proposição

Seja $m : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ a medida de Lebesgue (i.e. a medida de Lebesgue-Stieltjes induzida pela identidade). Se $E \in \mathcal{L}$, então, $\forall r \in \mathbb{R}$:

1. $E + r \in \mathcal{L}$ *e* $m(E + r) = m(E)$;
2. $rE \in \mathcal{L}$ *e* $m(rE) = |r|m(E)$.