Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

10 de março de 2020

Medidas em Espaços Mensuráveis

Definição (Medidas (recordação))

Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$. Diz-se que μ é uma *medida* se

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- μ enumeravelmente aditiva, i.e. $\mu(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para toda $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$.

Pushforward, Traço e Restrição

Definição

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida.

i) Dados $(Y, \mathcal{N})$ espaço mensurável e $\phi : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ aplicação mensurável, define-se $\phi_{\#}\mu : \mathcal{N} \to [0, \infty]$ por $A \mapsto \mu\big(\phi^{-1}(A)\big)$. Então $\phi_{\#}\mu$ é uma medida, chamada *pushforward* de μ por ϕ.

ii) Dado $Y \in \mathcal{M}$, o traço $\mathcal{M}|_Y$ é subconjunto de $\mathcal{M}$, de modo que faz sentido considerar $\mu|_Y : \mathcal{M}|_Y \to [0, \infty]$ obtida por restrição de $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$. Chamamos $\mu|_Y$ de *traço* de μ em Y.

iii) Dado $Y \in \mathcal{M}$, definimos $(\forall A \in \mathcal{M})\mu \llcorner Y(A) \doteq \mu(Y \cap A)$. Então $\mu \llcorner Y : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ é uma medida, chamada *restrição* de μ a Y. Note que $\mu \llcorner Y = i_{\#}(\mu|_Y)$, onde $i : Y \to X$ é a inclusão.

Proposição (Propriedades das Medidas)

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Tem-se:

(i) *(monotonicidade) Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(ii) *(subaditividade enumerável) Dados $A \in \mathcal{A}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec A$ com $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$,*

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(iii) *(continuidade para cima) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Proposição (Propriedades das Medidas(cont.))

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espaço de medida. Tem-se:*

(iv) *(continuidade para baixo) Seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ *decrescente. Suponha que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mu(A_{n_0}) < \infty$*. Então*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Observação

Não vale (iv) com a omissão da hipótese de que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ $\mu(A_{n_0}) < \infty$: tome $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \mu=$ medida de contagem$)$ e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec 2^{\mathbb{N}}$ dada por $A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$. Tem-se: $(\forall n)\mu(A_n) = \infty \therefore \mu(A_n) \to \infty$, mas $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ e $\mu(\emptyset) = 0$.

Espaço de Medida Completo

Definição

Dado $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $N \subset X$ diz-se *nulo* se $\exists B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = 0$ e $N \subset B$.

Definição (espaço de medida completo)

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Diz-se que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é *completo* (ou que μ é *completa*) se todo nulo for mensurável, i.e. $N \subset X$ nulo implica $N \in \mathcal{A}$.

Completamento de um Espaço de Medida

Proposição

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Defina:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{Y \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, \exists N \subset X \text{ nulo}, Y = A \cup N\}$$

Então $\tilde{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra e μ admite uma única extensão a uma medida $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$. Além disso, $\tilde{\mu}$ é completa.

Nomenclatura: μ-a.e.

Definição

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $P(x)$ uma propriedade relativa aos pontos de X. Diz-se que P vale μ-quase sempre em X se $\{x \in X | \neg P(x)\}$ for um conjunto nulo (i.e. subconjunto de um mensurável de medida zero).

Notação

P μ-q.s.

Exemplo

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida.

1. Dadas $f, g : X \to \mathbb{C}$, "$f = g$ μ-q.s." significa $\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}$ é nulo.
2. Dadas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções e $f : X \to \mathbb{C}$, "$f_n \to f$ μ-q.s." significa $\{x \in X | f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$ é nulo.

Medida Exterior

Definição

Sejam X um conjunto e $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$. Diz-se que μ^* é uma *medida exterior* se:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) (subaditividade enumerável) se $A \subset X$ e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec 2^X$ tais que $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, então $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Note que (ii) na definição acima implica μ^* monótona.

Pré-medida Exterior

Proposição

Sejam X conjunto, $\mathcal{A} \subset 2^X$ *tal que* $\emptyset \in \mathcal{A}$ *e* $\rho : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *tal que* $\rho(\emptyset) = 0$*. Então:*

$$\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$$
$$E \mapsto \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec A \text{ e } E \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

é uma medida exterior.

Observação

$\inf \emptyset = +\infty$.

Definição

Com a notação da proposição acima, ρ chama-se *pré-medida exterior* e μ^* a medida exterior *induzida* por ρ.

Exemplo

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \doteq \{(a, b] \cap \mathbb{R} | a, b \in \overline{\mathbb{R}},\ a \leq b\}$, $\rho : \mathcal{A} \to [0, \infty]$

$$(a, b] \cap \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} b - a & \text{se } b < \infty \\ \infty & \text{se } b = \infty \end{cases}$$

Mensurabilidade Segundo Carathéodory

Definição (mensurabilidade com respeito a uma medida exterior)

Seja $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ medida exterior. Digo que $A \subset X$ é μ^**-mensurável* se for cumprida a *condição de Carathéodory*:

$$\forall E \subset X,\ \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \qquad \text{(Ca)}$$

Ideia Geométrica (ex. 19 da seção 1.4, lista 4)

Seja μ^* uma medida exterior em X induzida por uma pré-medida (i.e. uma medida numa álgebra) finita μ_0. Dado $E \subset X$, defina a *medida interior* de E por $\mu_*(E) \doteq \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$. Então E é μ^*-mensurável see $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Mensurabilidade Segundo Carathéodory

Observação

Para que (Ca) seja verificada, basta que, para todo $E \subset X$ com $\mu^*(E) < \infty$,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Teorema de Carathéodory

Teorema

Sejam X um conjunto e $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ medida exterior. Então:

(i) $\sigma(\mu^*) \doteq \{E \subset X | E\ \mu^*\text{-}mensurável\}$ *é uma σ-álgebra e $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ é uma medida.*

(ii) $\forall E \subset X | \mu^*(E) = 0$, *tem-se $E \in \sigma(\mu^*)$. Em particular, $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ é completa.*

Definição

$\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ chama-se *medida induzida* por μ^*.

Teorema de Extensão de Carathéodory

Teorema (teorema de extensão de Carathéodory)

Seja $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ *medida numa álgebra* $\mathcal{A} \subset 2^X$ *e* $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ *induzida por* μ_0*. Então:*

(a) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

(b) $\mathcal{A} \subset \sigma(\mu^*)$.

(c) $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mu^*)$ *e* $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ *é uma medida que estende* μ_0*. Além disso, se* $\nu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0,\infty]$ *for outra medida que estende* μ_0, $\nu \leq \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$, *i.e.,* $\forall E \in \sigma(\mathcal{A})$, $\nu(E) \leq \mu^*(E)$*. Vale a igualdade se* $\mu^*(E) < \infty$*. Finalmente, se* $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ *for* σ*-finita (i.e.* $\exists (A_n)_n \prec \mathcal{A}$ *tal que* $\cup_n A_n = X$ *e* $(\forall n)\ \mu_0(A_n) < \infty$*), então* $\nu = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ *(em outras palavras, a extensão* $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ *é única).*

Pergunta:

Com a notação acima, qual a relação entre

(1) $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})})$ e

(2) $(X, \sigma(\mu^*), \mu^*|_{\sigma(\mu^*)})$?

Resposta:

- Se $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ for σ-finita, (2) é o completamento de (1).
- No caso geral, (2) é o *saturamento* (vide definição no exercício 16 da seção 1.3 – lista 3) do completamento de (1).