Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

4 de março de 2020

Aplicações Mensuráveis

Definição

Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis. Uma aplicação $\phi : X \to Y$ diz-se *mensurável* se $\forall B \in \mathcal{B}$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposição

Com a notação acima, sejam $S \subset 2^Y$ e $\mathcal{B} = \sigma(S)$. Para que ϕ seja mensurável basta que, $\forall B \in S$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposição

Sejam

$$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{\psi} (Z, \mathcal{C})$$

aplicações mensuráveis entre espaços mensuráveis. Então $\psi \circ \phi$ é mensurável.

Observação (Propriedades da pré-imagem)

Seja $\phi : X \to Y$. Tem-se:

(i) Se $(A_\alpha)_{\alpha \in A}$ família da subconjuntos de Y, então:

$$\phi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} \phi^{-1}(A_\alpha)$$

$$\phi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} \phi^{-1}(A_\alpha)$$

(ii)

$$\forall A \subset Y, \phi^{-1}(A^c) = \left(\phi^{-1}(A)\right)^c$$

Proposição

Sejam (X, τ_X), (Y, τ_Y) *espaços topológicos e* $\phi : X \to Y$ *contínua. Então* $\phi : (X, \mathcal{B}_X) \to (Y, \mathcal{B}_Y)$ *é mensurável.*

Convenção

Se (Y, τ_Y) for um espaço topológico, sempre consideraremos Y munido de $\mathscr{B}_Y$, salvo menção explícita em contrário.
Por exemplo, se $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $f : X \to Y$, dizemos que f é $\mathcal{M}$-mensurável se $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathscr{B}_Y)$ for mensurável.

σ-álgebra induzida por uma família de aplicações

Proposição (σ-álgebra induzida por uma família de aplicações)

Sejam X um conjunto, $(Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços mensuráveis e $(X \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha)_{\alpha \in A}$. Então existe uma menor σ-álgebra $\mathcal{M}$ em X que torna, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, f_α mensurável. Além disso, se $(\forall \alpha \in A)\mathcal{A}_\alpha = \sigma(S_\alpha)$,
$\mathcal{M} = \sigma\big(\{V \subset X \mid \exists \alpha \in A, \exists D \in S_\alpha, V = f_\alpha^{-1}(D)\}\big)$.

Definição

A menor σ-álgebra cuja existência é assegurada pela proposição acima chama-se *σ-álgebra induzida pela família* $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$.

σ-álgebra induzida por uma família de aplicações

Proposição

Com a notação da definição e proposição acima, sejam, $(Z, \mathcal{C})$ espaço mensurável e $\phi : Z \to Y$

$$(Z, \mathcal{C}) \xrightarrow{\phi} (X, \mathcal{B}) \xrightarrow{f_\alpha} (Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$$

Então $\phi : (Z, \mathcal{C}) \to (X, \mathcal{B})$ é mensurável se, e somente se, $(\forall \alpha \in A)\ f_\alpha \circ \phi$ for mensurável.

Exemplo (σ-álgebra produto:)

Seja $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços mensuráveis. Em $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ consideramos a σ-álgebra induzida pela família $(\mathrm{pr}_\alpha : X \to X_\alpha)_{\alpha \in A}$, a qual chamamos de σ-álgebra produto e denotamos por $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$.

Observação

- $f : (Y, \mathcal{N}) \to (X, \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha)$ é mensurável *see* $(\forall \alpha) \mathrm{pr}_\alpha \circ f : (Y, \mathcal{N}) \to (X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ o for.
- Na situação acima, suponha que, para cada $\alpha \in A$, $D_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$. É verdade que $\Pi_{\alpha \in A} D_\alpha \in \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$? Em geral, não. Se A for enumerável, sim: neste caso, basta observar que $\Pi_{\alpha \in A} D_\alpha = \cap_{\alpha \in A} \mathrm{pr}_\alpha^{-1}(D_\alpha)$ é uma interseção enumerável de mensuráveis.

σ-álgebra induzida por uma família de aplicações

Proposição

Com a notação acima, se A for enumerável, o conjunto $\{\Pi_{\alpha \in A} D_\alpha : \forall \alpha, D_\alpha \in \mathcal{A}\}$ *gera* $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$.

Exercício

Sejam $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ *família de espaços topológicos e* $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ *com a topologia produto. Tem-se:*

1. $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{B}_{X_\alpha} \subset \mathcal{B}_X$
2. *Vale a outra inclusão se A enumerável e* $(\forall \alpha \in A) \tau_\alpha$ *tiver base enumerável (ou, equivalentemente, se a topologia produto tiver base enumerável).*

σ-álgebra induzida por uma família de aplicações

Corolário

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Mais geralmente, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_{1 \leq i \leq n} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Corolário

Seja $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável. Então:

- *$f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável see $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ o forem.*
- *$f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ é mensurável see cada f_i o for.*

σ-álgebra induzida por uma família de aplicações

Exemplo (pullback e traço)

Seja $(Y, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $f : X \to Y$. A σ-ágebra em X induzida por $\{f\}$ chama-se *pullback* de $\mathcal{A}$ e é denotada por $f^*\mathcal{A}$.

- Note que $f^*\mathcal{A} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{A}\}$.
- Caso particular: suponha $X \subset Y$ e $f = i$ a inclusão de X em Y. O *pullback* $i^*\mathcal{A}$ coincide com $\{B \cap X : B \in \mathcal{A}\}$ e é chamado de *restrição* ou *traço* de $\mathcal{A}$ em X, denotado por $\mathcal{A}|_X$. Em particular, se $X \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{A}|_X = \{B \in \mathcal{A} | B \subset X\}$.

σ-álgebra induzida por uma família de aplicações

Exemplo

- (mudança de contradomínio) Se $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ tem imagem contida em $A \subset Y$, então f é mensurável see $f : (X, \mathcal{M}) \to (A, \mathcal{N}|_A)$ o for.
- Se X for um espaço topológico e $A \subset X$, então $\mathscr{B}_X|_A = \mathscr{B}_A$, i.e. o traço de $\mathscr{B}_X$ em A coincide com a σ-álgebra de Borel de A (munido da topologia relativa).

Proposição

Sejam $(X, \mathcal{M})$ *espaço mensurável e* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ *tal que* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$*. Uma função* f *em* X *é mensurável* see $(\forall n \in \mathbb{N})$ *a restrição de* f *a* $(A_n, \mathcal{M}|_{A_n})$ *for mensurável.*

Operações com Funções Mensuráveis

Proposição

Sejam $(X, \mathcal{M})$ *espaço mensurável e* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *funções* $\mathcal{M}$*-mensuráveis. Então:*

- $f \pm g$ *e* fg *são mensuráveis.*
- *Se* g *não se anular,* f/g *é mensurável.*