Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

<https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Departamento de Matemática
IME - USP

29 de julho de 2020

Notação

Fixemos, até o final desta seção, um espaço localmente compacto Hausdorff (“LCH”, daqui em diante) (X, τ_X) .

Definição (medidas de Radon)

Uma medida positiva μ em $(X, \mathcal{B}_X)$ diz-se *de Radon* se:

1. para todo $K \subset X$ compacto, $\mu(K) < \infty$.
2. μ é *exteriormente regular* em todos os borelianos:
 $\forall E \in \mathcal{B}_X, \mu(E) = \inf\{\mu(\mathcal{U}) \mid E \subset \mathcal{U} \text{ e } \mathcal{U} \in \tau_X\}$.
3. μ é *interiormente regular* nos abertos: $\forall \mathcal{U} \in \tau_X,$
 $\mu(\mathcal{U}) = \sup\{\mu(K) \mid K \Subset \mathcal{U}\}$.

Definição (funcionais lineares positivos em $C_c(X)$)

Denotamos por $C_c(X)$ o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial

$\{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ contínua e } \text{spt } f \Subset X\}$. Um funcional linear $l : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ diz-se *positivo* se $l(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$.

Notação

Dado $\mathcal{U} \in \tau_X$, a notação “ $f \prec \mathcal{U}$ ” significa: $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$, $\text{spt } f \in \mathcal{U}$.

Teorema

Seja $I : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear positivo. Então existe uma única medida de Radon μ em $(X, \mathcal{B}_X)$ que o representa, i.e. tal que, $\forall f \in C_c(X)$:

$$I(f) = \int f \, d\mu$$

Além disso, a medida μ em abertos ou compactos de X se calcula pelas fórmulas abaixo:

- i) $\forall \mathcal{U} \in \tau_X, \mu(\mathcal{U}) = \sup\{I(f) \mid f \prec \mathcal{U}\}$.
- ii) $\forall K \in \mathcal{K}, \mu(K) = \inf\{I(f) \mid \chi_K \leq f\}$.

Exemplo

- Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dada $f \in C_c(M)$, define-se $I(f) \doteq \int f|\omega|$ a integral de f com respeito à densidade induzida pelo elemento de volume de (M, g) usando-se integrais de Riemann, como no Cálculo em Variedades.
- Isso define um funcional linear positivo em $C_c(M)$. Pelo teorema de representação de Riesz, tal funcional se representa por uma única medida de Radon em $(M, \mathcal{B}_M)$, chamada *medida de Lebesgue* de (M, g) .
- No caso particular em que M é a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a medida de Lebesgue em $\mathbb{S}^n$ coincide com a medida em $(\mathbb{S}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{S}^n})$ definida quando da discussão da integração em coordenadas polares.

Observação

A positividade de um funcional linear $I : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ garante a continuidade de I com respeito a uma certa topologia LF em $C_c(X)$, i.e. a topologia limite indutiva dos subespaços $C_c(K) \doteq \{f \in C_c(X) \mid \text{spt } f \subseteq K\}$, onde K percorre o conjunto das partes compactas de X , munidos das respectivas topologias C_0 (i.e. topologia da convergência uniforme em K).

Proposição

Sejam X espaço LCH e μ uma medida de Radon em $(X, \mathcal{B}_X)$. Então μ é internamente regular em todo $E \in \mathcal{B}_X$ σ -finito com respeito a μ , i.e. $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \Subset E\}$.

Corolário

Com a notação da proposição anterior, se μ for σ -finita (por exemplo, se X for σ -compacto), então μ é regular, i.e. interna e exteriormente regular em todos os borelianos de X .

Proposição

Seja μ uma medida de Radon σ -finita em $(X, \mathcal{B}_X)$. Então, para todo $E \in \mathcal{B}_X$:

- i) $\forall \epsilon > 0$, existem $\mathcal{U} \supset E$ aberto e $F \subset E$ fechado tais que $\mu(\mathcal{U} \setminus F) < \epsilon$.*
- ii) existem $A \in F_\sigma$ e $B \in G_\delta$ tais que $A \subset E \subset B$ e $\mu(B \setminus A) = 0$.*

Teorema

Seja X espaço LCH no qual todo aberto é σ -compacto (por exemplo, se X tiver base enumerável de abertos). Então toda medida positiva μ em $(X, \mathcal{B}_X)$ finita nos compactos de X é uma medida de Radon.

Corolário

Toda medida boreliana em $\mathbb{R}^n$ finita nos compactos é de Radon. Em particular, toda medida de Lebesgue-Stieltjes em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ é de Radon.

Proposição

Sejam X espaço LCH e μ uma medida de Radon em $(X, \mathcal{B}_X)$. Então, para $1 \leq p < \infty$, $C_c(X)$ é denso em $L^p(\mu)$.

Teorema (Lusin)

Sejam X espaço LCH, μ uma medida de Radon em $(X, \mathcal{B}_X)$ e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função boreliana que se anule no complementar de um boreliano E de medida finita. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\phi \in C_c(X)$ que coincide com f no complementar de um mensurável de medida menor que ϵ . Além disso, se f for limitada, é possível tomar ϕ de modo que $\|\phi\|_u \leq \|f\|_u$.