Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

20 de julho de 2020

Alguma motivação para a introdução da norma L^∞

- Sejam X um conjunto e $f : X \to \mathbb{C}$ limitada. $\|f\|_u \doteq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ é uma norma completa no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ limitada}\}$.
- Queremos definir uma norma similar para funções mensuráveis num espaço de medida, que independa da classe de equivalência da função módulo funções nulas quase sempre.
- Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Note que, se f limitada,

$$\|f\|_u = \inf\{C > 0 : \forall x \in X, |f(x)| \leq C\}.$$

O Espaço L^∞

Definição

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Diz-se que $C \in [0, \infty]$ é *cota superior essencial para f* se $\mu\{x \in X : |f(x)| > C\} = 0$.

$$\|f\|_\infty \doteq \inf\{C \in [0, \infty] \mid C \text{ cota superior essencial para } f\}$$

chama-se *supremo essencial de f*.

Exercício

Com a notação acima:

1. $\mathcal{L}^\infty(\mu) \doteq \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty < \infty\}$ *é* $\mathbb{C}$*-subespaço vetorial de* $\mathbb{C}^X$ *e* $\|\cdot\|_\infty$ *é uma seminorma em* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.
2. *Se* $f : X \to \mathbb{C}$ *mensurável,* $\|f\|_\infty$ *é uma cota superior essencial para* f*. Daí* $\|f\|_\infty = 0$ see $f = 0$ μ*-q.s.*
3. $L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu)/\{f : \|f\|_\infty = 0\}$ *é completo com a normal induzida no quociente, ou seja,* $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ *é um espaço de Banach.*

Exercício

Se $0 < p < q < r \leq \infty$, $L^q \subset L^p + L^r$.

Dica

Dada $f \in L^q$, tome $A \doteq \{x \in X : |f(x)| \leq 1\}$ e escreva $f = f\chi_A + f\chi_{A^c}$.

Exercício

Se $0 < p < q < r \leq \infty$, $L^p \cap L^r \subset L^q$. *Além disso, tomando* $\lambda \in (0,1)$ *tal que* $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$, *tem-se, para toda* $f : X \to \mathbb{C}$ *mensurável,* $\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}$.

Dica

Basta verificar a desigualdade. Se $r = \infty$, o argumento é direto. Se $0 < p < q < r < \infty$, escreva $\frac{1}{q} = \frac{1}{p/\lambda} + \frac{1}{r/(1-\lambda)}$ e aplique a desigualdade de Hölder generalizada para o produto $|f| = |f|^{\lambda}|f|^{1-\lambda}$.

Notação

Fixaremos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

- Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjugados e $g \in L^p$.
- Pela desigualdade de Hölder, fica bem definido um funcional linear contínuo $\phi_g : L^q \to \mathbb{C}$ dado por $f \mapsto \int fg \, \mathrm{d}\mu$, tal que $\|\phi_g\| \leq \|g\|_p$.
- A proposição a seguir afirma que, em quase todas as situações, $\|\phi_g\| = \|g\|_p$, de modo que $g \mapsto \phi_g$ define uma isometria linear $\phi : L^p \to L^{q*}$.

Proposição

Com a notação acima, se $1 \leq p < \infty$*, ou se* $p = \infty$ *e* μ *semifinita,* $\phi : L^p \to L^{q*}$ *é uma isometria linear.*

Demonstração.

Só precisamos verificar que, $\forall g \in L^p$, $\|\phi_g\| \geq \|g\|_p$, pois a outra desigualdade segue por Hölder e a linearidade é clara. Se $\|g\|_p = 0$, não há o que fazer; suponha, pois, $\|g\|_p > 0$.

1. Se $1 < p < \infty$, tome $f \doteq \overline{\operatorname{sgn} g} \cdot \frac{|g|^{p-1}}{\|g\|_p^{p-1}}$. Então $\|f\|_q = 1$ e $\phi_g(f) = \int fg \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_p$, de modo que $\|\phi_g\| \geq \|g\|_p$, como afirmado.
2. Se $p = 1$ e $q = \infty$, tome $f \doteq \overline{\operatorname{sgn} g}$. Então $\|f\|_\infty = 1$ (pois $g > 0$ num conjunto de medida > 0) e $\phi_g(f) = \int fg \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_1$, donde $\|\phi_g\| \geq \|g\|_1$, como afirmado.

□

(cont.)

3. Se $p = \infty$ e μ semifinita. Nesse caso, $q = 1$ e, dado $\epsilon > 0$, como $\|g\|_\infty$ é o supremo essencial de g, podemos tomar $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) > 0$ tal que $|g| > \|g\|_\infty - \epsilon$ em E. E, pela semifinitude de μ, podemos supor $\mu(E) < \infty$. Tome $f \doteq \overline{\operatorname{sgn} g} \cdot \frac{\chi_E}{\mu(E)}$. Então $\|f\|_1 = 1$ (pois $|\operatorname{sgn} g| = 1$ em E para $\|g\|_\infty - \epsilon > 0$) e $\phi_g(f) = \int fg \, \mathrm{d}\mu \geq \|g\|_\infty - \epsilon$. Pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$ tomado, isso implica $\|\phi_g\| \geq \|g\|_\infty$, como afirmado.

□

Reciprocamente, em quase todas as situações, se g é uma função mensurável tal que $f \mapsto \int fg \, \mathrm{d}\mu$ define um funcional linear contínuo em L^q, então $g \in L^p$.

Teorema (recíproca da desigualdade de Hölder)

Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjungados e g uma função mensurável tal que fg seja integrável para toda função $f \in L^q(\mu)$ e tal que:

$$M_p(g) \doteq \sup\{|\int fg| : f \in L^q(\mu), \|f\|_q \leq 1\} < \infty$$

Suponha também que $S_g \doteq \{g \neq 0\}$ seja σ-finito ou que μ seja semifinita. Então $g \in L^p$ e $\|g\|_p = M_p(g)$.

Provaremos o enunciado abaixo, que claramente implica o anterior.

Teorema (recíproca da desigualdade de Hölder, v.2)

Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjungados e g uma função mensurável tal que fg seja integrável para toda função $f \in \Sigma \doteq \{$funções simples integráveis$\}$ e tal que:

$$M_p(g) \doteq \sup\{|\int fg| : f \in \Sigma, \|f\|_q \leq 1\} < \infty$$

Suponha também que $S_g \doteq \{g \neq 0\}$ seja σ-finito ou que μ seja semifinita. Então $g \in L^p$ e $\|g\|_p = M_p(g)$.

Teorema de Representação de Riesz para o Dual de L^p

Finalmente, provaremos a seguir que, se $p < \infty$, em quase todas as situações, a isometria linear $\phi : L^p \to L^{q*}$ definida acima é sobrejetiva, de modo a identificar $L^{q*} \equiv L^p$.

Teorema (teorema de representação de Riez para o dual de L^p)

Sejam $p \in (1, \infty]$ e q o expoente conjugado de p (de modo que $q \in [1, \infty)$). Se $q > 1$, ou se $q = 1$ e μ σ-finita, $\phi : L^p \to L^{q*}$ é uma isometria linear sobrejetiva.

Lema (Fatou para L^∞)

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* L^+ *e* $f \doteq \liminf f_n$. *Então* $\|f\|_\infty \leq \liminf \|f_n\|_\infty$.

Demonstração.

Seja $c < \|f\|_\infty$. Então $\{f > c\}$ tem medida estritamente positiva, e $\{f > c\} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq n} \{f_k > c\}$. Portanto, pela subaditividade enumerável de μ, conclui-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\cap_{k\geq n_0}\{f_k > c\}$ tem medida estritamente positiva, donde $(\forall k \geq n_0)\|f_k\|_\infty > c$. Pela arbitrariedade do $c < \|f\|_\infty$ tomado, isso implica $\|f\|_\infty \leq \liminf \|f_n\|_\infty$. □

Corolário

Se $1 < p < \infty$, $L^p(\mu)$ *é um espaço de Banach reflexivo.*

Proposição (desigualdade de Chebyshev)

Sejam $0 < p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ *e* $\alpha > 0$. *Então* $\mu(\{|f| > \alpha\}) \leq \left[\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right]^p$.

Teorema (desigualdade de Minkowski integral)

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *espaços de medida* σ*-finitos e* f *uma função* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*-mensurável em* $X \times Y$*.*

a) *Se* $f \in \mathsf{L}^+$ *e* $1 \leq p < \infty$*,*

$$\left[\int \left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^p \mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p} \leq \int \left[\int f(x,y)^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p} \mathrm{d}\nu(y)$$

b) *Se* $p \in [1, \infty]$*, vale a desigualdade abaixo, desde que o segundo membro faça sentido e seja finito:*

$$\left\| \int f(\cdot, y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p\,\mathrm{d}\nu(y)$$