Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

20 de julho de 2020

Norma p

Definição

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $p \in (0, \infty)$. Dada $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, definimos:

$$\|f\|_p \doteq \left[\int |f|^p d\mu\right]^{1/p} \in [0, \infty]$$

$$\mathcal{L}^p(\mu) \doteq \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável} : \|f\|_p < \infty\}$$

Exercício

Com a notação acima, $\mathcal{L}^p(\mu)$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathbb{C}^X$.

Lema

Sejam $a, b \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$. Então, $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$.

Demonstração.

Se $a = 0$ ou $b = 0$, a desigualdade é trivial. Suponha que $a > 0$ e $b > 0$. Tome $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $a = e^A$, $b = e^B$. Então:

$$a^\lambda \cdot b^{1-\lambda} = (e^A)^\lambda \cdot (e^B)^{1-\lambda} = \exp(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq$$

$$\overset{\text{exp é convexa}}{\leq} \lambda e^A + (1-\lambda)e^B = \lambda a + (1-\lambda)b.$$

$\square$

Expoentes Conjugados

Definição

Seja $p \in (1, \infty)$. O *expoente conjugado de p* é o único $q \in (0, \infty)$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

a saber, $q = p/(p-1)$.

Notação

$q = p'$ ou $q = p^*$.

Observação

Note que, por simetria, $q = p' \ \mathit{see}\ p = q'$.

Desigualdade de Hölder

Teorema (Desigualdade de Hölder)

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *espaço de medida,* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *mensuráveis e* $p, q \in (1, \infty)$ *expoentes conjugados. Então,*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Corolário

Com a hipótese do teorema acima, se $f \in \mathcal{L}^p$ *e* $g \in \mathcal{L}^q$*, então* $f \cdot g \in \mathcal{L}^1$*.*

Exercício

a) *(desigualdade de Young) Sejam* $a_1, \ldots, a_N \geq 0$ *e* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N > 0$ *tais que* $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$*. Então:*

$$\prod_{i=1}^N a_i \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i^{\frac{1}{\lambda_i}}.$$

b) *(desigualdade de Hölder generalizada) Sejam* $r, p_1, \ldots, p_N \in (0, \infty)$ *tais que* $\dfrac{1}{r} = \sum_{i=1}^N \dfrac{1}{p_i}$*. Então, se* $f_1, \ldots, f_N$ *mensuráveis:*

$$\|\prod_{i=1}^N f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{p_i}.$$

Dica

Na parte a), use a convexidade da exponencial. Na parte b), use a desigualdade de Young com

$$a_i = \frac{|f_i|^r}{\|f_i\|_{p_i}^r} \text{ e } \lambda_i = \frac{r}{p_i},$$

para $1 \leq i \leq N$.

Teorema (desigualdade de Minkowski)

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *espaço de medida,* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *mensuráveis e* $p \in [1, \infty)$. *Então,*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Corolário

Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *espaço de medida e* $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ *é* $\mathbb{C}$*-subespaço de* $\mathbb{C}^X$ *e* $\|\cdot\|_p$ *é uma seminorma em* $\mathcal{L}^p(\mu)$.

O Espaço L^p

- Dado $p \in [1, \infty)$, definimos $N \doteq \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mid \|f\|_p = 0\} = \{f : X \to \mathbb{C}$ mensurável$| f = 0$ μ-q.s.$\}$.
- N é $\mathbb{C}$-subespaço de $\mathcal{L}^p(\mu)$ e, pondo: $\mathrm{L}^p(\mu) \doteq \mathcal{L}^p(\mu)/N$ e

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \mathrm{L}^p(\mu) &\to [0, \infty) \\ [f] &\mapsto \|f\|_p \end{aligned}$$

então $(\mathrm{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado.

Teorema

Com a notação acima, $(\mathrm{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *é um espaço de Banach.*

Notação

Abandonaremos agora a notação provisória "$\mathcal{L}^p(\mu)$" e usaremos a mesma notação (sobrecarregada) "$\mathrm{L}^\mathrm{p}(\mu)$" para denotar tanto $\mathcal{L}^p(\mu)$ como o quociente $\mathcal{L}^p(\mu)/N$. Uma convenção de notação análoga será usada para o espaço $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ a ser definido mais adiante.

Exercício

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *espaço de medida,* $p \in [1, \infty)$ *e* $S \doteq \{\varphi : X \to \mathbb{C}$ *simples com* $\varphi = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}, a_i \in \mathbb{C}, \mu(E_i) < \infty\}$*. Então* S *é denso em* $\mathrm{L}^\mathrm{p}(\mu)$*.*