

Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

<https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Departamento de Matemática
IME - USP

15 de julho de 2020

Objetivo:

Aplicaremos o teorema de diferenciação de Lebesgue em dimensão 1, o que resultará numa generalização do Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue.

Notação

Dada f função real, usaremos a notação $f(x\pm)$ para denotar $\lim_{y \rightarrow x^\pm} f(y)$.

Proposição

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) \doteq f(x+)$. Então:

1. g é crescente e contínua à direita.
2. o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.
3. f e g são deriváveis m-q.s. e $f' = g'$ m-q.s.

- As medidas de Radon em $\mathbb{R}$ (i.e. as medidas de Lebesgue-Stieltjes) foram descritas anteriormente por meio de funções crescentes de contínuas à direita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Descreveremos, a seguir, através de uma construção similar, como são as medidas complexas em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
- Para tal, usaremos, no lugar de funções crescentes, funções de *variação limitada*, conforme definido a seguir.

Funções de Variação Limitada

Definição

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. A *função variação total* de f é a função $T_f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ dada por:

$$T_f(x) \doteq \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| : N \in \mathbb{N}, -\infty < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x \right\}$$

Definição

Diz-se que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é de *variação limitada* (NOTAÇÃO: $f \in \text{BV}$) se $T_f(+\infty) < \infty$.

Definição

Analogamente, dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, definimos a sua *variação*:

$$\text{Var}_{[a,b]}(f) \doteq \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| \mid N \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b \right\}$$

Diz-se que f é de *variação limitada* se $\text{Var}_{[a,b]}(f) < \infty$.

Notação

$f \in \text{BV}([a, b])$.

Observação

- Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\forall x < y \in \mathbb{R}$, $T_f(y) = T_f(x) + \text{Var}_{[x,y]}(f)$.
Portanto, se $f \in \text{BV}$, então $\text{Im } T_f \subset \mathbb{R}$ e as restrições de f aos subintervalos compactos de $\mathbb{R}$ são de variação limitada.
- Toda $f \in \text{BV}([a, b])$ pode ser estendida a uma função $\tilde{f} \in \text{BV}$; por exemplo, $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\tilde{f}|_{[a,b]} = f$, $f(x) = f(a)$ para $x \leq a$ e $f(x) = f(b)$ para $x \geq b$. Através desta extensão, teoremas relativos às funções de BV têm versões correspondentes para funções em $\text{BV}([a, b])$.

Exemplo

- a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for crescente, então $f \in BV$ e f limitada.
Basta observar que, se f crescente,
 $(\forall x \in \mathbb{R}) T_f(x) = f(x) - f(-\infty)$.
- b) BV é um $\mathbb{C}$ -subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Basta observar que,
se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $a, b \in \mathbb{C}$,
 $(\forall x \in \mathbb{R}) T_{af+bg}(x) \leq |a|T_f(x) + |b|T_g(x)$.
- c) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ derivável e f' limitada, então $f \in BV([a, b])$
para todo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Basta aplicar o teorema do valor
médio.
- d) $\sin \notin BV$, mas $\sin \in BV([a, b])$ para todo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. $f \in BV$ *see* $\operatorname{Re} f \in BV$ e $\operatorname{Im} f \in BV$.
2. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estiver em BV , $T_f \pm f$ são crescentes e limitadas (portanto estão em BV).
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a BV *see for* a diferença de duas funções crescentes e limitadas. Em caso afirmativo, podemos tomar estas funções como sendo $\frac{1}{2}(T_f + f)$ e $\frac{1}{2}(T_f - f)$.

Corolário

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de variação limitada. Tem-se:

- 1. existem e são finitos $f(x+)$ e $f(x-)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, bem como $f(\pm\infty)$. O conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.*
- 2. Pondo $g(x) \doteq f(x+)$, f e g coincidem quase sempre (com respeito à medida de Lebesgue), são deriváveis quase sempre e suas derivadas coincidem quase sempre.*
- 3. Se $f \in BV$, $T_f(-\infty) = 0$. Além disso, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x\pm) - f(x)| = |T_f(x\pm) - T_f(x)|$. Portanto, f é contínua à direita (respectivamente, à esquerda) em x se e só se T_f o for.*
- 4. se f tomar valores reais e for contínua à direita (respectivamente, à esquerda) em $x \in \mathbb{R}$, suas variações positiva e negativa também o são.*

Variação Positiva e Negativa

Definição

Com a notação do teorema acima, se $f \in BV$ tomar valores reais,

- $v^+ f \doteq \frac{1}{2}(T_f + f)$ chama-se *variação positiva* de f ;
- $v^- f \doteq \frac{1}{2}(T_f - f)$ chama-se *variação negativa* de f .

Definição

Diz-se que $f \in \text{NBV}$ (i.e. “normalized” BV) se $f \in \text{BV}$, $f(-\infty) = 0$ e f contínua à direita.

Corolário

Se $f \in \text{BV}$ e $\tilde{f} \doteq g - f(-\infty)$, onde $g(x) \doteq f(x+)$, então $\tilde{f}$ pertence a NBV; $\tilde{f}$ chama-se normalizada de f .

Demonstração.

Pela proposição “diferenciabilidade de funções crescentes”, $x \mapsto v^+(\text{Re } f)(x+)$ e $x \mapsto v^-(\text{Re } f)(x+)$ são funções crescentes e contínuas a direita. São limitadas, pois $\text{Re } f$ o é. Então, como $(\forall x \in \mathbb{R}) \text{Re } g(x) = \text{Re } f(x+) = v^+(\text{Re } f)(x+) - v^-(\text{Re } f)(x+)$, conclui-se que $\text{Re } g$ é contínua à direita, e segue-se do teorema 6, parte iii), que $\text{Re } g$ está em BV. Analogamente, prova-se que $\text{Im } g$ está em BV e é contínua à direita. Finalmente, $g(-\infty) = f(-\infty)$, de modo que $\tilde{f}(-\infty) = 0$, é contínua à direita e está em BV. □

Teorema (caracterização das medidas complexas em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$)

Seja μ uma medida complexa em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Então $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(x) \doteq \mu((-\infty, x])$ está em NBV. Reciprocamente, dada $F \in \text{NBV}$, existe uma única medida complexa μ_F em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ tal que $(\forall x) F(x) = \mu_F((-\infty, x])$.

Além disso, $|\mu_F| = \mu_{T_F}$ e, se F a valores reais, μ_F^+ e μ_F^- são induzidas, respectivamente, pelas variações positiva e negativa de F .

Lema

Sejam λ e ν medidas com sinal finitas em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ tais que λ e ν coincidem em todos os h -intervalos limitados $(a, b]$, $a < b$ reais. Então $\lambda = \nu$.

Próximo passo:

Em vista do teorema anterior, a questão natural a ser colocada é: dada $F \in \text{NBV}$, sob que condições μ_F é mutuamente singular ou absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue?

Proposição

Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ em NBV. Então $F' \in L^1(m)$ e F' coincide m -quase sempre com a derivada de Radon-Nikodym da parte absolutamente contínua de μ_F com respeito a m . Em particular:

- i) $\mu_F \perp m$ se e $F' = 0$ m -quase sempre.
- ii) $\mu_F \ll m$ se e $\mu_F = F' dm$ se e $(\forall x \in \mathbb{R}) F(x) = \int_{-\infty}^x F' dm$.

A condição $\mu_F \ll m$ também pode ser caracterizada usando a noção clássica de *continuidade absoluta*:

Definição

Diz-se que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é *absolutamente contínua* se, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, para toda sequência finita $\{(a_i, b_i)\}_{1 \leq i \leq N}$ de intervalos abertos disjuntos tal que $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$, tem-se $\sum_{i=1}^N |F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon$.

Analogamente, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ diz-se absolutamente contínua se a condição acima valer para toda sequência finita disjunta $\{(a_i, b_i)\}_{1 \leq i \leq N}$ de intervalos abertos contidos em $[a, b]$.

Note que, se F for absolutamente contínua, então F é uniformemente contínua (use $N = 1$ na definição).

Proposição

Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ em NBV. Então $\mu_F \ll m$ se e só se F for absolutamente contínua.

Corolário

Dada $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, são equivalentes:

- a) Existe $f \in L^1(m)$ tal que $(\forall x \in \mathbb{R}) F(x) = \int_{-\infty}^x f \, dm$.*
- b) $F \in \text{NBV}$ e F é absolutamente contínua.*
- c) $F \in \text{NBV}$ e $\mu_F \ll m$.*

Em caso afirmativo, $f = F'$ m-q.s. e coincide m-q.s. com a derivada de Radon-Nikodym de $F \, dm$ com respeito a m .

Proposição

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ absolutamente contínua. Então f é de variação limitada.

Demonstração.

Na definição 12, tome δ correspondente a $\epsilon = 1$. Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ partição de $[a, b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$, para $1 \leq i \leq N$. Então, para toda partição $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ que refine P , tem-se $\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| < N$, o que implica $\text{Var}_{[a,b]}(f) \leq N$. □

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue)

Sejam $a < b$ reais e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. São equivalentes:

- a) f é absolutamente contínua.
- b) Existe $g \in L^1([a, b], \mathcal{B}, m)$ tal que
 $(\forall x \in [a, b]) f(x) = f(a) + \int_a^x g \, dm.$
- c) f é derivável m -quase sempre em $[a, b]$, $f' \in L^1$ e
 $(\forall x \in [a, b]) f(x) = f(a) + \int_a^x f' \, dm.$

Em caso afirmativo, g como no item b) coincide m -q.s. com f' .

Teorema (integração por partes)

Sejam $a < b$ reais e $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ em NBV, sendo ao menos uma delas contínua. Então

$$\int_{(a,b]} F d\mu_G + \int_{(a,b]} G d\mu_F = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Demonstração.

Deixada com exercício, seguindo o seguinte roteiro: 1) reduza ao caso em que F e G são crescentes; 2) Digamos que G seja contínua. Ponha $\Omega \doteq \{(x, y) \in (a, b] \times (a, b] \mid x \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$ e calcule $\mu_F \times \mu_G(\Omega)$ pelo teorema de Tonelli, fazendo-se as integrais iteradas nas duas ordens. □