Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

1 de julho de 2020

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que uma família $(E_r)_{r>0} \prec \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ *converge agradavelmente* para x se:

nice.i) $\forall r > 0$, $E_r \subset B(x, r)$.

nice.ii) Existe $\alpha > 0$ tal que $\forall r > 0$, $m(E_r) > \alpha m\big(B(x, r)\big)$.

Teorema (teorema de diferenciação de Lebesgue, v.2)

Seja $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(m)$. Então, para todo ponto x no conjunto de Lebesgue de f (portanto, para m-quase todo ponto), e para toda família $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x, tem-se:

$$\lim_{r\to 0} \fint_{E_r} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}m(y) = 0.$$

Demonstração.

Sejam $x \in L_f$ e $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x.
Tome $\alpha > 0$ conforme a segunda condição da definição 1.
Então, $\forall r > 0$,

$$\frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}m(y) \leq$$

$$\frac{1}{\alpha m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}m(y) \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

$\square$

Medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$

Definição

Uma medida positiva μ em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ diz-se *de Radon* se for finita nos compactos. Uma medida ν com sinal ou complexa em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ diz-se *de Radon* se sua variação total $|\nu|$ o for.

Teorema (teorema de diferenciação de Lebesgue para medidas)

Sejam ν medida de Radon com sinal ou complexa em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ e $\nu = \lambda + f\,\mathrm{d}m$ a sua decomposição de Lebesgue-Radon-Nikodym com respeito à medida de Lebesgue m. Então, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, e para toda família de borelianos $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x, tem-se:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x).$$

Lema

Seja μ medida de Radon positiva em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Então, para todo boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(E) = \inf\{\mu(\mathcal{U}) \mid E \subset \mathcal{U} \text{ aberto}\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E \text{ compacto}\}$.