Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

24 de junho de 2020

Motivação:

Sejam m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $\nu \ll m$ uma medida com sinal ou complexa. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, seja

$$F(x) \doteq \lim_{r \to 0} \frac{\nu\big(B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \frac{d\nu}{dm}\, \mathrm{d}m$$

definida para x tal que o limite acima existe.

- Objetivo: investigar a relação entre F e $\frac{d\nu}{dm}$. Por exemplo, se $\frac{d\nu}{dm}$ for uma função contínua em $\mathbb{R}^n$, então $F = \frac{d\nu}{dm}$.
- Teorema de Diferenciação de Lebesgue: se $\frac{d\nu}{dm} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, então $F = \frac{d\nu}{dm}$ m-q.s.
- Ou seja, vale o “Teorema Fundamental do Cálculo”: se $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, a derivada da “integral indefinida” $f\,\mathrm{d}m$ com relação a m coincide com a própria f.

Lema de Cobertura de Wiener

Notação

Dada B bola aberta em $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $\widehat{B}$ a bola aberta concêntrica a B e com raio igual a 3 vezes o de B.

Teorema (lema de cobertura de Wiener)

Sejam K um compacto de $\mathbb{R}^n$ e $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura de K por bolas abertas. Então existe uma subcoleção finita $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $(B_\alpha)_\alpha$ formada por bolas disjuntas e tal que $(\widehat{B}_i)_{1 \leq i \leq N}$ cobre K.

Corolário

Seja $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma coleção de bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $m(\cup_{\alpha \in A} B_\alpha) > c$. Então existe uma subcoleção finita $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $(B_\alpha)_\alpha$ formada por bolas disjuntas e tal que $m(\dot{\cup}_{1 \leq i \leq N} B_i) > 3^{-n} c$.

Definição ($\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ e média)

Seja f uma função em $\mathbb{R}^n$, Lebesgue-mensurável, a valores em $\mathbb{C}$ ou em $\overline{\mathbb{R}}$. Diz-se que f é *localmente integrável* (NOTAÇÃO: $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(m)$) se, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\int_K |f| \, \mathrm{d}m < \infty$. Para $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(m)$ e $A \in \mathcal{L}^n$ tal que $m(A) > 0$, definimos a *média de f em A*:

$$\fint_A f \, \mathrm{d}m \doteq \frac{1}{m(A)} \int_A f \, \mathrm{d}m$$

Proposição

Seja $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(m)$. Como função de $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, a média $⨍_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}m$ é uma função contínua.

Demonstração.

- É claro que $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \mapsto m\big(B(x, r)\big)$ é contínua.
- A continuidade de $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \mapsto \int_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}m$ é um corolário do teorema da convergência dominada, deixado como exercício.

$\square$

Corolário

Com a notação acima, dada $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(m)$*, a função* $Hf : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *dada por*

$$Hf(x) \doteq \sup\{ ⨍_{B(x,r)} |f| \, \mathrm{d}m \mid r > 0 \}$$

é semicontínua inferiormente; em particular, é boreliana.

Demonstração.

Se X é um espaço topológico e $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família de funções semicontínuas inferiormente $X \to \overline{\mathbb{R}}$, então $f \doteq \sup_{\alpha \in A} f_\alpha$ é semicontínua inferiormente. Com efeito, $(\forall r \in \mathbb{R}) f^{-1}\big((r, \infty]\big) = \cup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}\big((r, \infty]\big)$ é uma união de abertos, portanto é aberto. $\square$

Definição (operador maximal de Hardy-Littlewood)

Com a notação do corolário acima, $H : f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(m) \mapsto Hf$ chama-se *operador maximal de Hardy-Littlewood* e Hf a função maximal de Hardy-Littlewood associada a f.

Teorema (desigualdade maximal de Hardy-Littlewood)

Existe uma constante $C = C(n)$ (dependendo apenas da dimensão n de $\mathbb{R}^n$) tal que, para toda $f \in \mathrm{L}^1(m)$ e para todo $\alpha > 0$, tem-se:

$$m(\{Hf > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1$$

Teorema (teorema de diferenciação de Lebesgue, v.1)

Seja $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(m)$, onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Então, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} f \, \mathrm{d}m$$