Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

21 de junho de 2020

Proposição (regra da soma)

Sejam μ medida positiva, ν_1 e ν_2 medidas com sinal em $(X, \mathcal{M})$, todas σ-finitas. Se $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$, e se $\nu_1 + \nu_2$ estiver definida, então $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$ e $\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$ μ-quase sempre.

Demonstração.

A primeira afirmação é imediata; quanto à segunda, basta observar que, $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$\int_E \frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu}\, \mathrm{d}\mu = (\nu_1 + \nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) =$$
$$= \int_E \frac{d\nu_1}{d\mu}\, \mathrm{d}\mu + \int_E \frac{d\nu_2}{d\mu}\, \mathrm{d}\mu = \int_E \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}\, \mathrm{d}\mu,$$

e a tese segue da unicidade da derivada de Radon-Nikodym. $\square$

Proposição (regra da cadeia)

Sejam μ, λ medidas positivas, ν medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$, todas σ-finitas. Suponha $\nu \ll \mu \ll \lambda$. Então:

i) $\forall g \in L^+$, $\int g \, \mathrm{d}\mu = \int g \frac{d\mu}{d\lambda} \, \mathrm{d}\lambda$. *Consequentemente,* $\forall g : X \to \mathbb{C}$:
   1) $g \in L^1(\mu) \Leftrightarrow g \frac{d\mu}{d\lambda} \in L^1(\lambda)$ *e, caso afirmativo, vale a mesma igualdade entre as integrais.*
   2) $g \in L^1(\nu) \Leftrightarrow g \frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ *e, caso afirmativo,* $\int g \, \mathrm{d}\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} \, \mathrm{d}\mu$.

ii) $\nu \ll \lambda$ *e* $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda}$ λ*-quase sempre.*

Corolário

Sejam μ, λ medidas positivas e σ-finitas em $(X, \mathcal{M})$, tais que $\mu \ll \lambda$ e $\lambda \ll \mu$. Então $\frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = 1$ quase sempre (com respeito a λ ou μ).

Definição (medidas complexas)

Uma *medida complexa* μ num espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ tal que:

mc.i) $\mu(\emptyset) = 0$.

mc.ii) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, com o significado de que, no segundo membro, a série é absolutamente convergente (i.e. a integral com respeito à medida de contagem existe) e sua soma é igual ao primeiro membro.

Exemplo

Se μ for uma medida positiva em $\mathcal{M}$ e $f : X \to \mathbb{C}$ for μ-integrável, $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ dada por

$$E \mapsto \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. Notação: $\nu = f \, \mathrm{d}\mu$.

Observação

É imediato verificar que, se μ for uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$, $\mu_r \doteq \operatorname{Re} \mu$ e $\mu_i \doteq \operatorname{Im} \mu$ são medidas com sinal finitas em $(X, \mathcal{M})$, o que nos permite generalizar para medidas complexas a teoria desenvolvida nas seções anteriores, conforme descrito nos teoremas a seguir.

Definição (continuidade absoluta e singularidade mútua para medidas complexas)

Sejam ν, λ medidas complexas e μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Diz-se que:

i) ν e λ são mutuamente singulares (NOTAÇÃO: $\nu \perp \lambda$) se $\nu_a \perp \lambda_b$ para $a, b = r, i$.

ii) ν é absolutamente contínua com respeito a μ (NOTAÇÃO: $\nu \ll \mu$) se $\nu_a \ll \mu$ para $a = r, i$.

Definição (integrabilidade com respeito a medidas complexas)

Seja ν medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. $\mathrm{L}^1(\nu) \doteq \mathrm{L}^1(\nu_r) \cap \mathrm{L}^1(\nu_i)$. Se $f \in \mathrm{L}^1(\nu)$,

$$\int f \, \mathrm{d}\nu \doteq \int f \, \mathrm{d}\nu_r + i \int f \, \mathrm{d}\nu_i .$$

Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Teorema

Sejam ν medida complexa e μ medida positiva σ-finita em $(X, \mathcal{M})$.

1. *(*Teorema de Decomposição de Lebesgue*) Existem únicas medidas complexas ν_a e ν_s em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu = \nu_a + \nu_s$.*
2. *(*Teorema de Radon-Nikodym*) Se $\nu \ll \mu$, existe $f : X \to \mathbb{C}$ μ-integrável tal que $\nu = f\,\mathrm{d}\mu$. Tal função é única, no sentido de que, se g for outra função com a mesma propriedade, então $g = f$ quase sempre com respeito a μ.*

Demonstração.

Basta aplicar a versão do teorema para medidas com sinal aos pares $(\mathrm{Re}\,\nu, \mu)$ e $(\mathrm{Im}\,\nu, \mu)$. Ponha $\nu_s \doteq (\mathrm{Re}\,\nu)_s + i(\mathrm{Im}\,\nu)_s$ e $\nu_a \doteq (\mathrm{Re}\,\nu)_a + i(\mathrm{Im}\,\nu)_a$, e $\frac{d\nu}{d\mu} \doteq \frac{d\,\mathrm{Re}\,\nu}{d\mu} + i\frac{d\,\mathrm{Im}\,\nu}{d\mu}$. Isso prova a existência, e a unicidade decorre da unicidade das partes reais e imaginárias enunciada na versão do teorema para medidas com sinal. $\square$

Definição

Com a notação do teorema acima:

1. ν_a e ν_s chamam-se, respectivamente, *parte absolutamente contínua* e *parte singular* de ν com respeito a μ.
2. f chama-se *derivada de Radon-Nikodym* de ν com respeito a μ e denota-se por $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Exercício

Com a notação da definição e teorema acima, enuncie e verifique generalizações das regras da soma e da cadeia para a derivada de Radon-Nikodym.

Variação Total de uma Medida Complexa

- Seja ν medida complexa em $(X, \mathcal{M})$.
- Tome μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$ tal que $\nu \ll \mu$.
- Pelo teorema de Radon-Nikodym, $\nu = f\,\mathrm{d}\mu$, onde $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$. Definimos:

$$|\nu| \doteq |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Proposição

O que vai acima é uma boa definição, i.e. $|\nu|$ não depende da medida positiva μ tomada.

Definição (variação total)

A medida positiva $|\nu|$ chama-se *variação total* de ν.

Observação

Se ν for uma medida com sinal finita, a definição acima coincide com a definição prévia de variação total, i.e. $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$. Com efeito, se (P, N) for uma decomposição de Hahn para ν, já vimos que $\nu = (\chi_P - \chi_N)\, \mathrm{d}(\nu^+ + \nu^-)$, e basta observar que $|\chi_P - \chi_N| = 1$.

Proposição (propriedades da variação total)

Seja ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$.

a) $\forall E \in \mathcal{M}$, $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$.

b) $\nu \ll |\nu|$ *e* $\frac{d\nu}{d|\nu|}$ *tem valor absoluto 1 quase sempre com respeito a* $|\nu|$.

c) $\mathrm{L}^1(\nu) = \mathrm{L}^1(|\nu|)$ *e, para toda* $f \in \mathrm{L}^1(\nu)$, $|\int f \,\mathrm{d}\nu| \leq \int |f| \,\mathrm{d}|\nu|$.

d) *Se* λ *for outra medida complexa em* $(X, \mathcal{M})$*, então* $|\nu + \lambda| \leq |\nu| + |\lambda|$.