Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

<https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Departamento de Matemática
IME - USP

10 de junho de 2020

Continuidade absoluta de uma medida com respeito a outra

Definição

Sejam ν medida com sinal e μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$.

Diz-se que ν é *absolutamente contínua* com respeito a μ

(NOTAÇÃO: $\nu \ll \mu$) se $\forall E \in \mathcal{M}$, $\nu(E) = 0$ sempre que $\mu(E) = 0$.

No caso em que ν é finita, a condição acima corresponde, de fato, a uma ideia de “continuidade”:

Proposição

Sejam ν medida com sinal finita e μ medida positiva em

$(X, \mathcal{M})$. Então $\nu \ll \mu$ se e só se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, se $E \in \mathcal{M}$ e

$\mu(E) < \delta$, então $|\nu(E)| < \epsilon$.

Corolário

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f \in L^1(\mu)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \delta$, então $|\int_E f \, d\mu| < \epsilon$.

Demonstração.

Basta observar que $\nu \doteq |f| \, d\mu$ é uma medida positiva finita e $\nu \ll \mu$; aplique a proposição anterior e a desigualdade triangular. □

Alguma motivação para o teorema de Radon-Nikodym

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e crescente. Então f induz uma medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_f : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$. Note que, $\forall a < b \in \mathbb{R}$:

$$\mu_f((a, b]) = f(b) - f(a) \stackrel{TFC}{=} \int_a^b f'(x) dx = \int_{(a,b]} f' dm,$$

donde $\mu_f = f' dm$.

2. Gostaríamos de investigar condições sob as quais uma medida boreliana na reta é da forma $f dm$, com f boreliana positiva. Ou, num contexto mais abstrato, dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, gostaríamos de caracterizar as medidas em $\mathcal{M}$ da forma $f d\mu$, com $f \in L^+$.

Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Teorema

Sejam ν medida com sinal e μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$, ambas σ -finitas.

1. (TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE LEBESGUE) *Existem únicas medidas com sinal ν_a e ν_s em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu = \nu_a + \nu_s$. Além disso, ν_a e ν_s são σ -finitas.*
2. (TEOREMA DE RADON-NIKODYM) *Se $\nu \ll \mu$, existe $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ -quase integrável tal que $\nu = f \, d\mu$. Tal função é única, no sentido de que, se g for outra função com a mesma propriedade, então $g = f$ quase sempre com respeito a μ .*

Definição

Com a notação do teorema acima:

1. ν_a e ν_s chamam-se, respectivamente, *parte absolutamente contínua* e *parte singular* de ν com respeito a μ .
2. f chama-se *derivada de Radon-Nikodym* de ν com respeito a μ e denota-se por $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Observação

1. As partes 1. e 2. do teorema são, em geral, enunciadas em teoremas distintos; foram aglutinadas aqui num único teorema porque a demonstração que faremos permite prová-las conjuntamente.
2. O teorema de Radon-Nikodym admite uma generalização: sem a σ -finitude de ν , i.e. dadas μ medida positiva σ -finita e ν medida com sinal (não necessariamente σ -finita) tal que $\nu \ll \mu$, garante-se a existência e unicidade μ -quase sempre da derivada de Radon-Nikodym.

Lema

Se μ e ν forem medidas positivas finitas no espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$, então $\mu \perp \nu$ ou existem $\epsilon > 0$ e $E \in \mathcal{M}$ tais que $\mu(E) > 0$ e E é positivo para a medida com sinal $\nu - \epsilon\mu$.