Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

8 de junho de 2020

Medidas com Sinal

Notação

Fixemos um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ até o final desta seção.

Definição (medida com sinal)

Uma *medida com sinal* ou *carga* em $(X, \mathcal{M})$ é uma aplicação $\nu : \mathsf{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

ms.i) $\operatorname{Im} \nu \subset (-\infty, \infty]$ ou $\operatorname{Im} \nu \subset [-\infty, \infty)$.

ms.ii) $\nu(\emptyset) = 0$.

ms.iii) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, com o significado de que, no segundo membro, a integral com respeito à medida de contagem existe e é igual ao primeiro membro (ou, equivalentemente, uma das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)^-$ tem soma finita e $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)^-$).

Observação

Por uma questão de clareza, doravante usaremos "medida positiva" para designar uma medida $\mathcal{M} \to [0, \infty]$.

Exemplo

1. Se $\mu^+, \mu^- : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ forem medidas positivas, sendo ao menos uma delas finita, $\nu \doteq \mu^+ - \mu^-$ é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.
2. Se μ for uma medida positiva em $\mathcal{M}$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ for μ-quase integrável, $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $E \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu$ é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

Observação

Veremos, mais adiante, que toda medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$ pode ser escrita em qualquer uma das formas do exemplo acima.

Proposição (continuidade para cima e para baixo)

Seja ν medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

i) *(continuidade para cima) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ crescente, $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}}) = \lim \nu(A_n)$.*

ii) *(continuidade para baixo) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ decrescente e $\nu(A_1)$ finito, $\nu(\cap_{n\in\mathbb{N}}) = \lim \nu(A_n)$.*

Demonstração.

É o mesmo argumento usado na prova do enunciado correspondente para medidas positivas:

i) Tome $(\forall n \in \mathbb{N})\tilde{A}_n \doteq A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k$. Então $(\tilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\cdot \mathcal{M}$ e $\dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}}\tilde{A}_n = \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, de modo que, por (ms.iii), $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(\tilde{A}_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\nu(\tilde{A}_k) = \lim_{n\to\infty}\nu(A_n)$, pois $(\forall n)A_n = \dot{\cup}_{k=1}^{n}\tilde{A}_k$.

ii) Aplique a parte i) à sequência crescente $(A_1 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para concluir que $\nu(A_1 \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \lim \nu(A_1 \setminus A_n)$. Como $\nu(A_1)$ é finito, $\nu(A_1 \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \nu(A_1) - \nu(\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n)$ e $\lim \nu(A_1 \setminus A_n) = \nu(A_1) - \lim \nu(A_n)$, donde a tese.

□

Definição (conjuntos positivos, negativos e nulos)

Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$ e $A \in \mathcal{M}$. Diz-se que A é:

i) *positivo* com respeito a ν se $\forall B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\nu(B) \geq 0$.

ii) *negativo* com respeito a ν se $\forall B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\nu(B) \leq 0$.

iii) *nulo* com respeito a ν se for positivo e negativo, i.e. se $\forall B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\nu(B) = 0$.

Proposição

Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

1. *Se $A \in \mathcal{M}$ for positivo (respectivamente, negativo), todo subconjunto mensurável de A é positivo (resp., negativo).*
2. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ for uma sequência de positivos (resp., negativos), $(\cup_{n\in\mathbb{N}})A_n$ é positivo (resp., negativo).*

Demonstração.

A parte 1. é imediata. Provemos a parte 2., supondo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ sequência de positivos. Tome $(\forall n \in \mathbb{N})\tilde{A}_n \doteq A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k$. Então $(\tilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\cdot \mathcal{M}$ e, para todo $B \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mensurável, $\nu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B \cap \tilde{A}_n) \geq 0$, pois $(\forall n) B \cap \tilde{A}_n \subset A_n$ é positivo. □

Teorema (teorema de decomposição de Hahn)

Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Então existem $P, N \in \mathcal{M}$, P positivo e N negativo com respeito a ν, tais que $P \cup N = X$ e $P \cap N = \emptyset$. Além disso, esta decomposição é única no seguinte sentido: se P', N' forem outros mensuráveis com a mesmas propriedades, então $P \Delta P'$ e $N \Delta N'$ são nulos com respeito a ν.

Definição

Com a notação do teorema acima, o par (P, N) chama-se uma *decomposição de Hahn* para ν.

Ideia:

SPG, suponha $\infty \notin \operatorname{Im} \nu$ (caso contrário faça o argumento com $-\nu$). Suponha que exista uma tal decomposição. Para todo $\widetilde{P}$ positivo, $\nu(\widetilde{P}) = \nu(\widetilde{P} \cap P) + \nu(\widetilde{P} \cap N) = \nu(\widetilde{P} \cap P) \leq \nu(P)$. Isso nos motiva a procurar P em $\{A \subset X \mid A \text{ positivo}\}$ com medida máxima.

Observação

- O teorema de decomposição de Hahn fornece uma decomposição do “espaço”;
- obteremos, a seguir, a partir da decomposição de Hahn, uma decomposição para a medida com sinal ν: a *decomposição de Jordan*.

Definição (medidas mutuamente singulares)

Sejam ν, λ medidas com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

- Diz-se que ν é *concentrada* em $N \in \mathcal{M}$ se N^c for nulo para ν, i.e. se $(\forall A \in \mathcal{M})\ \nu(A) = \nu(A \cap N)$.
- Diz-se que ν e λ são *mutuamente singulares* (NOTAÇÃO: $\nu \perp \lambda$) se existirem $N, L \in \mathcal{M}$ tais que $N \cup L = X$, $N \cap L = \emptyset$, ν concentrada em N e λ concentrada em L.

Teorema (teorema de decomposição de Jordan)

Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Então existem únicas medidas positivas ν^+, ν^- tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$.

Demonstração.

1) existência: tome (P, N) decomposição de Hahn para ν, $\nu^+ \doteq \nu \llcorner P : E \in \mathcal{M} \mapsto \nu(E \cap P)$ e $\nu^- \doteq -\nu \llcorner N$.
2) unicidade: suponha μ^+, μ^- medidas positivas tais que $\nu = \mu^+ - \mu^-$ e $\mu^+ \perp \mu^-$. Tome $P', N' \in \mathcal{M}$ disjuntos e tais que $X = P' \cup N'$, P' nulo para μ^- e N' nulo para μ^+. Sejam $\nu^\pm$ e (P, N) como no item anterior. Então (P, N) e (P', N') são ambas decomposições de Hahn para ν, de modo que, pela unicidade enunciada no teorema de decomposição de Hahn, $P \Delta P'$ e $N \Delta N'$ são ν-nulos. Então, para todo $E \in \mathcal{M}$, tem-se:

$$\mu^+(E) = \mu^+(E \cap P') = \nu(E \cap P') = \nu(E \cap P) = \nu^+(E).$$

Analogamente, $\mu^-(E) = \nu^-(E)$, logo $\mu^+ = \nu^+$ e $\mu^- = \nu^-$.

□

Definição (variações positiva, negativa e total de uma medida com sinal)

Com a notação do teorema acima, o par (ν^+, ν^-) chama-se *decomposição de Jordan* para ν.

- A medida positiva ν^+ chama-se *variação positiva* e a medida ν^- chama-se *variação negativa* de ν.
- A medida positiva $|\nu| \doteq \nu^+ + \nu^-$ chama-se ν^+ *variação total* de ν.

Observação

1. A nomenclatura acima segue a mesma nomenclatura usada para a decomposição de uma função de variação limitada nas suas variações positiva, negativa e total, conforme será visto mais adiante; e, conforme também será visto, estas decomposições para medidas e para funções estão relacionadas entre si.
2. Note que, se $\infty \notin \operatorname{Im} \nu$, $\nu^+(X) = \nu(P) < \infty$, de modo que ν^+ é uma medida finita. Analogamente, se $-\infty \notin \operatorname{Im} \nu$, ν^- é uma medida finita. Em particular, se $\operatorname{Im} \nu \subset \mathbb{R}$, então $\operatorname{Im} \nu$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Integral com respeito a uma medida com sinal

Definição

Seja ν medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

i) $\mathsf{L}^1(\nu) \doteq \mathsf{L}^1(\nu^+) \cap \mathsf{L}^1(\nu^-)$. Para $f \in \mathsf{L}^1(\nu)$, $\int f \,\mathrm{d}\nu \doteq \int f \,\mathrm{d}\nu^+ - \int f \,\mathrm{d}\nu^-$.

ii) ν diz-se *σ-finita* se ν^+ e ν^- o forem ($\mathtt{see}\ |\nu|$ o for).

Exercício

Seja ν medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Então:

a) $\forall E \in \mathcal{M}$, $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$.

b) $\mathsf{L}^1(\nu) = \mathsf{L}^1(|\nu|)$ *e, para toda* $f \in \mathsf{L}^1(\nu)$, $|\int f \,\mathrm{d}\nu| \leq \int |f| \,\mathrm{d}|\nu|$.

c) $\nu = f \,\mathrm{d}|\nu|$, *onde* $f = \chi_P - \chi_N$ *e* (P, N) *decomposição de Hahn para* ν.