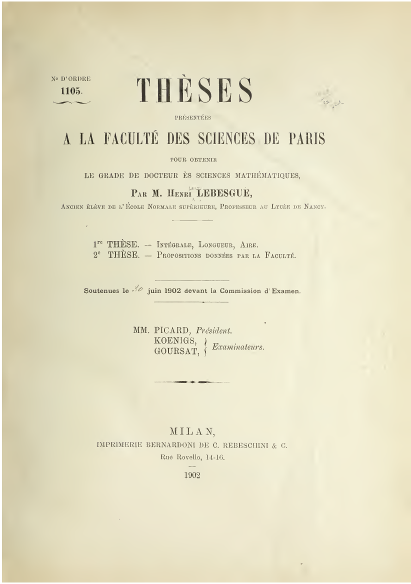
Medida e Integração - IME - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Departamento de Matemática
IME - USP

4 de março de 2020

Henri Lebesgue, 1902: Intégrale, Longueur, Aire.



Nº D'ORDRE
1105.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRI LEBESGUE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE DE NANCY.

1re THÈSE. — INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 20 juin 1902 devant la Commission d'Examen.

MM. PICARD, *Président.*
KOENIGS, } *Examinateurs.*
GOURSAT, }

MILAN,
IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.
Rue Rovello, 14-16.
1902

Referências Sugeridas para o Curso

- Gerald B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

O Problema da Medida

Definição

Seja X um conjunto. Uma *função de conjuntos em X* é uma função cujo domínio é um subconjunto de 2^X.

Definição

Seja X um conjunto e $\mu : \mathcal{A} \subset 2^X \to [0, \infty]$. Diz-se que μ é:

- *finitamente aditiva* se

$$\left.\begin{array}{c} A_1, \cdots, A_n \text{ disjuntos em } \mathcal{A} \\ A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

- σ*-aditiva* (ou *enumeravelmente aditiva*) se

$$\left.\begin{array}{c} (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ família disjunta em } \mathcal{A} \\ A = \dot{\bigcup}_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Tentativa de se definir um "volume n-dimensional" em $\mathbb{R}^n$

Ideia natural: $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ tal que

- μ σ-aditiva;
- Se A congruente a B em $\mathbb{R}^n$, $\mu(A) = \mu(B)$;
- $\mu([0, 1]^n) = 1$.

Não existe tal μ!!

Teorema (paradoxo de Banach-Tarski)

Sejam U, V abertos limitados em $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). Então $\exists k \in \mathbb{N}$ e

- $E_1, \cdots, E_k$ *disjuntos em* $\mathbb{R}^n$ *cuja reunião é* U
- $F_1, \cdots, F_k$ *disjuntos em* $\mathbb{R}^n$ *cuja união é* V
- E_i *congruente a* F_i *para* $1 \leq i \leq n$

Remediaremos esta situação, definindo-se μ num domínio menor que o conjunto das partes.

Linguagem e Notação Preliminares

- Linguagem da teoria dos conjuntos: seção 0 do Folland.
- A reta estendida:

$$\overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

- Relação de ordem em $\overline{\mathbb{R}}$: $a < b$ se
  - $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ ou
  - $a = -\infty$, $b \neq -\infty$ ou
  - $b = +\infty$, $a \neq +\infty$

- $<$ é uma relação de ordem *total* (i.e. quaisquer dois elementos se comparam) e *completa* (i.e. todo conjunto não vazio e limitado superiormente admite supremo). Além disso, todo conjunto não vazio é limitado superiormente (por $+\infty$) e inferiormente (por $-\infty$), portanto admite supremo e ínfimo.
- Em $\overline{\mathbb{R}}$, consideramos a topologia da ordem, i.e., gerada pela sub-base:

$$\big\{\{x \in \overline{\mathbb{R}} | x < a\}, \{x \in \overline{\mathbb{R}} | x > b\} : a, b \in \mathbb{R}\big\}$$

- Com a topologia acima, $\overline{\mathbb{R}}$ é um espaço metrizável, compacto (é uma compactificação de $\mathbb{R}$). Além disso, as operações $+ : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)\} \to \overline{\mathbb{R}}$ e $\cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(\pm\infty, 0), (0, \pm\infty)\} \to \overline{\mathbb{R}}$, definidas da maneira óbvia, são contínuas.

- Seja $\{x_n\}_n$ sequência em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\lim} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} x_k$$
$$\underline{\lim} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} x_k$$

- Analogamente, dada $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ e $a \in \mathbb{R}$:

$$\overline{\lim}_{x \to a} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup\{f(x) : 0 < |x - a| < \delta\}$$
$$\underline{\lim}_{x \to a} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf\{f(x) : 0 < |x - a| < \delta\}$$

Definição

$0 \cdot \pm\infty \doteq 0$ e $\pm\infty \cdot 0 \doteq 0$

- $\cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ não é contínua em $(0, \pm\infty)$ e $(\pm\infty, 0)$. De fato: Tome $(x_n, y_n) \doteq (+\infty, \frac{1}{n})$. Então:

$$(x_n, y_n) \to (+\infty, 0)$$
$$x_n \cdot y_n = \infty \neq +\infty \cdot 0 = 0$$

- $\cdot :[0, \infty] \times [0, \infty] \to [0, \infty]$ obtida por restrição:
  - é "upward continuous", ou seja:

$$\text{se } \begin{cases} x_n \uparrow x \text{ em } [0, \infty] \\ y_n \uparrow y \text{ em } [0, \infty] \end{cases} \quad \text{então } x_n \cdot y_n \to x \cdot y$$

  - não é "downward continuous":

$$x_n = +\infty$$
$$y_n = \frac{1}{n}$$

é tal que $x_n \downarrow +\infty$, $y_n \downarrow 0$ mas $x_n \cdot y_n = +\infty$.

Essa assimetria surge pela forma como se definiu $0 \cdot \pm\infty = 0$ e acarretará outras assimetrias mais adiante.

σ-álgebras

Definição

Sejam X um conjunto $\emptyset \neq \mathcal{A} \in 2^X$. Diz-se que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra* (respectivamente, uma σ*-álgebra*) se for fechada por complementação e por união finita (respectivamente, por união enumerável).

Exemplo

Seja X um conjunto.

1. 2^X é uma σ-álgebra.
2. $\{\emptyset, X\} \subset 2^X$ é uma σ-álgebra
3. $\mathcal{A} \doteq \{A \subset X | A$ é finito ou A^c é finito$\}$ é uma álgebra.
4. $\mathcal{A} \doteq \{A \subset X | A$ é enumerável ou A^c é enumerável$\}$ é σ-álgebra.

Proposição

Seja $\mathcal{A}$ σ-álgebra de subconjuntos de X. Tem-se:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A}$ *é fechada por intersecção enumerável.*

Demonstração.

(i) é imediato e (ii) segue das *Regras de Morgan*:
Seja $(A_\alpha)_{\alpha \in A}$ família em 2^X, então:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha^c$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha^c$$

□

Notação

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec X$ para denotar $x : \mathbb{N} \to X$ (i.e. x é uma sequência a valores no conjunto X).
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\!\cdot\, X$ para denotar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec X$ e $x_n \cap x_m = \emptyset$ se $n \neq m$ (assumindo que os elementos de X sejam conjuntos).

Proposição

Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ uma álgebra. São equivalentes:

(a) *$\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável.*

(b) *$\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável crescente, i.e. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente $\Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.*

(c) *$\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável disjunta, i.e. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\!\cdot\, \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.*

Proposição

Seja X um conjunto, $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de σ-álgebras de X. Então $\cap_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha \subset 2^X$ é uma σ-álgebra.

Definição (σ-álgebra gerada por um conjunto)

Sejam X conjunto, $S \subset 2^X$. Pela proposição anterior existe uma σ-álgebra $\sigma(S) \subset 2^X$ tal que:

(i) $S \subset \sigma(S)$

(ii) $\forall \mathcal{A} \subset 2^X$ σ-álgebra com $S \subset \mathcal{A}$, $\sigma(S) \subset \mathcal{A}$.

A saber, $\sigma(S) = \cap\{\mathcal{A} \subset 2^X | \mathcal{A}\ \sigma\text{-álgebra e } S \subseteq \mathcal{A}\}$. $\sigma(S)$ chama-se *σ-álgebra gerada por S*.

Observação

De forma análoga, dado $S \subset 2^X$, faz sentido considerar faz sentido considerar a *álgebra gerada por S*: é a interseção de todas as álgebras que contém S.

Definição (σ-álgebra de Borel)

Seja (X, τ) espaço topológico. A σ-álgebra $\sigma(\tau)$ chama-se σ-álgebra de Borel de (X, τ) e denota-se por $\mathcal{B}(X)$ ou $\mathcal{B}_X$.

Definição (Medidas)

Seja X um conjunto, $\emptyset \in S \subset 2^X$.

(i) Uma *medida em S* é uma função de conjunto σ-aditiva $\mu : S \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Uma *medida finitamente aditiva em S* é uma função de conjunto finitamente aditiva $\mu : S \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

Exemplo

1. Sejam X conjunto, $\mathcal{M} = 2^X$ e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por $\mu(A) \doteq |A|$ se A finito e $\mu(A) = \infty$ caso contrário. Então μ é uma medida, chamada *medida de contagem* em X. Qualquer restrição de μ também é chamada pelo mesmo nome.
2. Sejam X conjunto, $\mathcal{M} = 2^X$, $x_0 \in X$ e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por $\mu(A) \doteq 1$ se $x_0 \in A$ $\mu(A) = 0$ caso contrário. Então μ é uma medida, chamada *medida de Dirac* centrada em x_0, a qual se denota por δ_{x_0}. Qualquer restrição de δ_{x_0} também é chamada pelo mesmo nome.

Definição (Espaço Mensurável e Espaço de Medida)

Sejam X um conjunto, $\mathcal{A} \subset 2^X$ uma σ-álgebra em X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida.

- o par $(X, \mathcal{A})$ chama-se *espaço mensurável*;
- a terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ chama-se *espaço de medida*.

Diz-se que μ é:

(i) *semi-finita* se $\forall A \in \mathcal{A} | \mu(A) = \infty$, $\exists B \in \mathcal{A} | B \subset A$ e $0 < \mu(B) < \infty$.

(ii) σ*-finita* se $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec A$ tal que

$$\begin{cases} (\forall n)\ \mu(A_n) < \infty \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \end{cases}$$

(iii) *finita* se $\mu(X) < \infty$.

(iv) *de probabilidade* se $\mu(X) = 1$.