MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Algumas Soluções`

1 Seções 3.2 e 3.3

14-) Sejam ν uma medida com sinal arbitrária (não necessariamente σ-finita) e μ uma medida positiva σ-finita em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu \ll \mu$. Então existe $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-quase integrável tal que $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu$. Como sugestão, use o seguinte roteiro:

(a) É suficiente demonstrar o caso em que μ é finita e ν é positiva.
(b) Com tais hipóteses, existe $E \in \mathcal{M}$ σ-finito para ν tal que $\mu(E) \geqslant \mu(F)$ para todo $F \in \mathcal{M}$ σ-finito para ν.
(c) O teorema de Radon-Nikodym se aplica em E. Se $F \in \mathcal{M}$ e $F \cap E = \emptyset$, então, ou $\nu(F) = \mu(F) = 0$ ou $\mu(F) > 0$ e $|\nu(F)| = \infty$.

Demonstração. a) Suponha provado o caso em que μ é finita e ν positiva. Suponha $+\infty \notin \operatorname{Im}\nu$, i.e. ν^+ finita. Tome $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$ e $(\forall n \in \mathbb{N})\mu(E_n) < \infty$. Defina $(\forall n)\mu_n \doteq \mu \llcorner E_n$ e $\nu_n \doteq \nu \llcorner E_n$. Então μ_n é finita e $\nu_n \ll \mu_n$, logo $\nu_n^\pm \ll \mu_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $f_n^\pm : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ_n-quase integrável tal que $\nu_n^\pm = f_n^\pm\,\mathrm{d}\mu_n$. Alterando f_n num conjunto μ_n nulo, se necessário, podemos supor $f_n^\pm = 0$ em E_n^c. E, como ν^+ é finita, $(\forall n)\nu_n^+$ é finita, portanto f_n^+ é μ_n-integrável e podemos supô-la finita em todos os pontos. Defina $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n \doteq f_n^+ - f_n^-$ e $f \doteq \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Afirmo que f é μ-quase integrável e $\nu = f\,\mathrm{d}\mu$. Com efeito:

i) f é mensurável, pois é o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis.
ii) $\nu^+ = \sum_{n=1}^\infty \nu_n^+ = \sum_{n=1}^\infty f_n^+\,\mathrm{d}\mu_n$. Portanto:

$$\int f^+\,\mathrm{d}\mu \overset{TCM}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f^+\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n^+\,\mathrm{d}\mu_n = \sum_{n=1}^\infty \nu_n^+(X) = \nu^+(X) < \infty$$

logo f é μ-quase integrável. A mesma conta mostra que, $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E f^+\,\mathrm{d}\mu = \nu^+(E)$ e, analogamente, $\int_E f^-\,\mathrm{d}\mu = \nu^-(E)$, portanto $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \nu(E)$.

b) Suponha μ finita e ν positiva. Seja $\mathcal{F} \doteq \{E \in \mathcal{M} : E\,\sigma\text{-finito para }\nu\}$. Afirmo que $A = \{\mu(E) : E \in \mathcal{F}\}$ admite um máximo. Com efeito, A é limitado superiormente por $\mu(X)$; tome $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{F}$ tal que $\mu(E_n) \to \sup A$. Podemos supor $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente (caso contrário, basta substituir E_n por $\tilde{E}_n = \cup_{i=1}^n E_i$, obtendo-se $(\tilde{E}_n)_n \prec \mathcal{F}$ com $\mu(\tilde{E}_n) \to \sup A$). Seja $E \doteq \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Então $E \in \mathcal{F}$ e, usando a continuidade para cima da medida, $\mu(E) = \sup A$.

c) Tome $E \in \mathcal{F}$ como no item anterior e $\nu_E \doteq \nu \llcorner E$, $\mu_E \doteq \mu \llcorner E$. Então $\nu_E \ll \mu_E$ e ambas são σ-finitas, de modo que, pelo teorema de Radon-Nikodym, existe $f_E : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ_E-quase integrável tal que $\nu_E = f_E\,\mathrm{d}\mu_E$. Podemos supor, alterando f_E num conjunto μ_E-nulo, se necessário, que f_E é positiva e se anula no complementar de E. Defina $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por $f = f_E$ em E e $f = +\infty$ em E^c. A função f assim definida é μ-quase integrável (pois é positiva e mensurável, uma vez que suas restrições a E e E^c o são). Verifiquemos que $\nu = f\,\mathrm{d}\mu$. De fato, se $F \in \mathcal{M}$ e $F \cap E = \emptyset$, uma das duas alternativas abaixo deve ocorrer:

i) $\mu(F) = 0$. Então $\nu(F) = 0 = \int_F f\,\mathrm{d}\mu$.
ii) $\mu(F) > 0$. Então F não pode ser σ-finito para ν (pela escolha de E no item anterior), portanto $\nu(F) = +\infty = \int_F f\,\mathrm{d}\mu$.

Portanto, $(\forall F \in \mathcal{M})\nu(F) = \nu(F \cap E) + \nu(F \cap E^c) = \int_{F\cap E} f_E\,\mathrm{d}\mu_E + \int_{F\cap E^c} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{F\cap E} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{F\cap E^c} f\,\mathrm{d}\mu = \int_F f\,\mathrm{d}\mu$, de modo que $\nu = f\,\mathrm{d}\mu$, como afirmado.

□

15-) Uma medida μ em $(X, \mathcal{M})$ diz-se *decomponível* se existir $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ com as seguintes propriedades:

i) $(\forall F \in \mathcal{F})\mu(F) < \infty$.

ii) $\mathcal{F}$ é uma família disjunta e sua união é X.

iii) Se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \infty$, então $\mu(E) = \sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(E \cap F)$.

iv) Se $E \subset X$ e $(\forall F \in \mathcal{F}) E \cap F \in \mathcal{M}$, então $E \in \mathcal{M}$.

a) Toda medida σ-finita é decomponível.

b) Se ν for uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$ tal que $\nu \ll \mu$, então existe $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável tal que, $\forall E \in \mathcal{M}$ σ-finito com respeito a μ, $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ e $|f| < \infty$ em todo $F \in \mathcal{F}$ σ-finito com respeito a ν.

Demonstração. a) Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$ e $(\forall n \in \mathbb{N})\mu(F_n) < \infty$. Então $\mathcal{F} \doteq \{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{M}$ e μ satisfazem i) a iv).

b) Para cada $F \in \mathcal{F}$, tome $\nu_F \doteq \nu \mathbin{\lrcorner} F$ e $\mu_F \doteq \mu \mathbin{\lrcorner} F$. Então μ_F é uma medida finita e ν_F é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$, tais que $\nu_F \ll \mu_F$. Pelo teorema de Radon-Nikodym (c.f. enunciado da questão anterior), existe $f_F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ_F-quase integrável tal que $\nu_F = f_F \, \mathrm{d}\mu_F$. Modificando f_F num conjunto μ_F-nulo, podemos supor que f_F se anula no complementar de F, e que f_F é finita em todos os pontos de F se F for σ-finito com respeito a ν (pois, se F for σ-finito com respeito a ν, podemos escrever F como união de uma sequência disjunta $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $(\forall n)|\nu|(E_n) = \int_{E_n} |f_F| \, \mathrm{d}\mu_F < \infty$, o que implica $\{x \in F : |f_F(x)| = \infty\}$ μ_F-nulo).

Tome $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f(x) = \sum_{F\in\mathcal{F}} f_F(x)$, i.e. f é tal que $(\forall F \in \mathcal{F}) f|_F = f_F$. Tem-se:

1) Se $A \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, $\forall F \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(A) \cap F = f_F^{-1}(A) \in \mathcal{M}$. Portanto, por (iv), $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, o que prova a mensurabilidade de f.

2) Se $F \in \mathcal{F}$ σ-finito com respeito a ν, $f|_F = f_F$ é finita em todos os pontos de F, por construção.

3) Seja $E \in \mathcal{M}$ σ-finito com respeito a μ. Mostremos que $\chi_E \cdot f$ é μ-quase integrável e $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \nu(E)$. Com efeito:

- Se $\mu(E) < \infty$, por iii) $\mu(E) = \sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(E \cap F)$. Então $\mathcal{F}_E \doteq \{F \in \mathcal{F} : \mu(F \cap E) > 0\}$ é enumerável. Pomos $E_1 \doteq \dot\bigcup_{F\in\mathcal{F}_E} E \cap F$ e $E_2 \doteq E \setminus E_1$. Então E_1 e E_2 são mensuráveis, $\mu(E_1) = \sum_{F\in\mathcal{F}_E} \mu(F \cap E) = \mu(E)$ e $\mu(E_2) = \mu(E) - \mu(E_1) = 0$. Como $|\nu| \ll \mu$, segue-se $\nu^\pm(E_2) = 0$, portanto:

$$\begin{aligned}\nu^\pm(E) = \nu^\pm(E_1) + \nu^\pm(E_2) = \nu^\pm(E_1) &= \sum_{F\in\mathcal{F}_E} \nu^\pm(E \cap F) = \\ &= \sum_{F\in\mathcal{F}_E} \nu_F^\pm(E) = \sum_{F\in\mathcal{F}_E} \int_E f_F^\pm \, \mathrm{d}\mu_F = \\ &= \sum_{F\in\mathcal{F}_E} \int_{E\cap F} f_F^\pm \, \mathrm{d}\mu = \sum_{F\in\mathcal{F}_E} \int_E f_F^\pm \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{=} \int_E f^\pm \, \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

  Assim, se ν^+ finita, segue-se $\int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu$ finita, e se ν^- finita, $\int_E f^- \, \mathrm{d}\mu$ finita, de modo que $f \cdot \chi_E$ é μ-quase integrável e $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

- No caso geral, podemos escrever E como reunião de uma sequência disjunta $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\cdot \mathcal{M}$ tal que $(\forall n)\mu(E_n) < \infty$. Então, pelo item anterior:

$$\nu^\pm(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^\pm(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^\pm \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{=} \int_E f^\pm \, \mathrm{d}\mu$$

  e, como no item anterior, conclui-se que $f \cdot \chi_E$ é μ-quase integrável e $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

□

Sobre a unicidade da derivada de Radon-Nikodym no contexto dos exercícios anteriores, usaremos o seguinte:

Lema 1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida semifinito e $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ quase integráveis e tais que $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$. Então $f = g$ μ-quase sempre.

Demonstração. Seja $A \doteq \{f < g\}$. Tem-se: $A = \{-\infty < f < g < \infty\} \cup \{-\infty = f < g < \infty\} \cup \{-\infty < f < g = \infty\} \cup \{-\infty = f < g = \infty\}$. Mostremos que cada um desses conjuntos tem medida nula. Com efeito:

i) $\{-\infty < f < g < \infty\} = \cup_{n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{Q}} \{n < f < r < g < m\}$. Dados $n, m \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Q}$, se $\{n < f < r < g < m\}$ tiver medida positiva, exite $E \in \mathcal{M}$ contido nesse conjunto com $0 < \mu(E) < \infty$, pela semifinitude de μ. Então $\int_E f \, \mathrm{d}\mu < r\mu(E) < \int_E g \, \mathrm{d}\mu$, chegando-se a uma contradição. Então $\{-\infty < f < g < \infty\}$ tem medida nula.

ii) $\{-\infty = f < g < \infty\} = \cup_{r\in\mathbb{Q}, n\in\mathbb{Z}} \{-\infty = f < r < g < n\}$. Se existirem $r \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Z}$ tais que $\{-\infty = f < r < g < n\}$ tenha medida positiva, podemos tomar $E \in \mathcal{M}$ de medida estritamente positiva e finita nesse conjunto, de modo que $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = -\infty < r\mu(E) < \int_E g \, \mathrm{d}\mu$, chegando-se a uma contradição. Então $\{-\infty = f < g < \infty\}$ tem medida nula.

iii) Analogamente se prova que $\{-\infty < f < g = \infty\}$ e $\{-\infty = f < g = \infty\}$ têm medida nula, portanto $\{f < g\}$ tem medida nula e, analogamente, $\{g < f\}$ tem medida nula.

$\square$

Corolário 1. A derivada de Radon-Nikodym definida no contexto da questão 14 é única μ-quase sempre. A derivada de Radon-Nikodym definida no contexto da questão 15 é única μ-quase sempre quando restrita a um mensurável σ-finito com respeito a μ.

Demonstração. No caso da questão 14, isso é imediato a partir do lema, pois μ é σ-finita, portanto semifinita.

No caso da questão 15: suponha que $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seja outra função mensurável tal que, para todo $E \in \mathcal{M}$ σ-finito com respeito a μ, $\chi_E \cdot g$ é μ-quase integrável e $\nu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$. Então, para todo $E \in \mathcal{M}$ σ-finito com respeito a μ, $\chi_E \cdot g$ e $\chi_E \cdot f$ são μ-quase integráveis e $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$. Portanto, dado $E \in \mathcal{M}$ σ-finito com respeito a μ, para todo $F \subset E$ mensurável, F é σ-finito com respeito a μ, logo $\int_F f \, \mathrm{d}\mu = \int_F g \, \mathrm{d}\mu$, o que implica, pelo lema, $f = g$ μ-q.s. em E. $\square$