MAT5798 - Medida e Integração

Prof. Gláucio Terra

P2 - 10/08/2020

Questão 1-) Sejam V aberto em $\mathbb{R}^n$ e μ medida boreliana finita em $\mathbb{R}^n$. Mostre que:

(i) ∂V é um boreliano;
(ii) se $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\mu(x + \partial V) = 0$, então a função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \mu(V + x)$ é contínua.

Questão 2-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for quase-uniformemente Cauchy (i.e. para todo $\epsilon > 0$, existe um mensurável de medida menor que ϵ no complementar do qual a sequência é uniformemente Cauchy), então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é quase-uniformemente convergente.

Questão 3-) Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas positivas em $\mathcal{M}$ tal que, para todo $E \in \mathcal{M}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(E) \leqslant \mu_{n+1}(E)$. Defina $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ por $\mu(E) \doteq \lim \mu_n(E)$. Mostre que:

(a) μ é uma medida.
(b) se $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$, então $\forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathsf{L}^1(\mu_n)$ e $\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim \int f \, \mathrm{d}\mu_n$.

Questão 4-) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for crescente, então $f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b f'(t) \, \mathrm{d}t$.

Questão 5-) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrável. Suponha que existam reais $a < b$ tais que, para todo aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $a \cdot m(\mathcal{U}) \leqslant \int_{\mathcal{U}} f \, \mathrm{d}m \leqslant b \cdot m(\mathcal{U})$. Mostre que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Questão 6-) Sejam $1 < p < \infty$, q expoente conjugado de p, $f \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mathbb{R}^n)$. Mostre que é contínua a função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por $v \mapsto \int f(x + v)g(x) \, \mathrm{d}x$.

Questão 7-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Defina a *imagem essencial* R_f de f por $R_f \doteq \{z \in \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \mu\{x \in X : |f(x) - z| < \epsilon\} > 0\}$. Demonstre as seguintes afirmações:

(a) R_f é fechado.
(b) Se $f \in \mathsf{L}^\infty(\mu)$, R_f é compacto e $\|f\|_\infty = \max\{|z| : z \in R_f\}$.
(c) Seja $A_f \doteq \{\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, \mathrm{d}\mu : E \in \mathcal{M} \text{ e } 0 < \mu(E) < \infty\}$. Então, se μ é semi-finita, R_f está contido no fecho de A_f.

Questão 8-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito e $f \in \mathsf{L}^\infty(\mu)$. Mostre que:

(a) $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
(b) $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \frac{\int |f|^{p+1}}{\int |f|^p} = \|f\|_\infty$.

Questão 9-) Sejam X LCH e μ medida de Radon em X.

(a) Seja N a união de todos os abertos $\mathcal{U} \subset X$ tais que $\mu(X) = 0$. Então N é aberto e $\mu(N) = 0$. O complemento de N chama-se *suporte* de μ (notação: $\operatorname{supp}\mu$).
(b) $x \in \operatorname{supp}\mu$ ***see*** para toda $f \in \mathrm{C}_c(X, [0, 1])$ tal que $f(x) > 0$, tem-se $\int f \, \mathrm{d}\mu > 0$.
(c) Seja X a compactificação de Alexandrov (i.e. compactificação com um ponto) de um espaço topológico discreto. Se μ é uma medida de Radon em X, então $\operatorname{supp}\mu$ é enumerável.

Questão 10-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e f uma função $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável em $X \times Y$, positiva. Então, para $1 \leqslant p < \infty$, as funções $x \mapsto \left(\int f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y)\right)^p$ e $y \mapsto \left(\int f(x, y)^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}$ são mensuráveis, e:

$$\left[\int \left(\int f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y)\right)^p \mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int \left(\int f(x, y)^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \mathrm{d}\nu(y).$$