

MAT5798 - Medida e Integração

Prof. Gláucio Terra

P1 - 01/06/2020

Questão 1-) Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Denote por $\mathcal{M}^+$ o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow [0, \infty)$ mensuráveis. Seja $L : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, \infty]$ tal que

i) $\forall a, b \in [0, \infty), \forall f, g \in \mathcal{M}^+, L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$;

ii) Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}^+$ e $f_n \uparrow f \in \mathcal{M}^+$ pontualmente, então $L(f_n) \rightarrow L(f)$.

Mostre que existe uma única medida μ em $(X, \mathcal{M})$ tal que, para toda $f \in \mathcal{M}^+, L(f) = \int f d\mu$.

Questão 2-) a) Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Defina $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $(\forall n \in \mathbb{N}) s_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n s_k}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

b) Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrável. Mostre que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^x f(y) dy dx = \int_0^\infty f(x) dx.$$

Questão 3-) Seja G um grupo topológico Hausdorff localmente compacto com base enumerável de abertos (caso você não saiba o que é um grupo topológico, veja o início do capítulo 11 do Folland). Uma *medida de Haar à esquerda* μ em G é uma medida boreliana não nula, finita nos compactos de G (i.e. uma medida de Radon em G) e invariante por translações à esquerda, i.e. tal que

$$(\forall E \in \mathcal{B}_G, \forall g \in G) \mu(g \cdot E) = \mu(E).$$

Pode-se mostrar que uma tal medida existe e é única a menos de multiplicação por constantes reais positivas (a hipótese de G ter base enumerável de abertos não é realmente necessária e a estamos assumindo apenas para simplificar). Exemplos: $\mathbb{R}^n$ com a medida de Lebesgue, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ com a medida definida na aula sobre integração em coordenadas polares, $\mathbb{Z}$ com a topologia discreta e a medida de contagem.

Fixe uma medida de Haar à esquerda μ em G e defina, dadas $f, g \in L^1(\mu)$, o *produto de convolução* $f * g$ por

$$f * g(x) := \int f(y)g(y^{-1}x) d\mu(y).$$

1) Mostre que $f * g$ é uma função boreliana definida quase sempre, $f * g \in L^1(\mu)$ e

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Conclua, em particular, que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ forem séries absolutamente convergentes de números complexos, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dada por

$$(\forall n \geq 0) c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \tag{1}$$

é absolutamente convergente e $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.

2) Sejam $f, g, h \in L^1(\mu)$. Então:

a) $(f * g) * h = f * (g * h)$;

b) $f * g = g * f$ se G abeliano.

Questão 4- Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completo. Dizemos que $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função *simples estendida* se for mensurável e tiver imagem enumerável. Para uma função $f : X \rightarrow [0, \infty]$, não necessariamente mensurável, definimos:

- (*integral superior*) $\int^* f \, d\mu := \inf\{\int \varphi \, d\mu : \varphi \in \mathcal{L}^+ \text{ simples estendida}, \varphi \geq f \text{ q.s.}\} \in [0, \infty]$,
- (*integral inferior*) $\int_* f \, d\mu := \sup\{\int \varphi \, d\mu : \varphi \in \mathcal{L}^+ \text{ simples estendida}, \varphi \leq f \text{ q.s.}\} \in [0, \infty]$.

Prove (ou dê um contraexemplo):

- Se $\int_* f = \int^* f < \infty$, então f é mensurável e $\int f$ coincide com ambas as integrais superior e inferior (logo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$).
- Se f for mensurável, então $\int_* f = \int^* f = \int f$.
- O teorema da convergência monótona vale para a integral superior, i.e. se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sequência de funções a valores em $[0, \infty]$ (não necessariamente mensuráveis) que cresça μ -q.s. para $f : X \rightarrow [0, \infty]$ (não necessariamente mensurável), então $\int^* f_n \rightarrow \int^* f$. Analogamente, o lema de Fatou também vale para a integral superior.
- Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sequência de funções a valores em $[0, \infty]$ (não necessariamente mensuráveis) tal que $\int^* f_n \rightarrow 0$, existe uma subsequência de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge μ -quase uniformemente para zero.
- Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $X \rightarrow [0, \infty]$. Então

$$\int_* \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_* f_n \, d\mu,$$

$$\int^* \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int^* f_n \, d\mu.$$

- Dada $f : X \rightarrow [0, \infty]$, seja $\psi : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ definida por $\psi(A) := \int_A^* f \, d\mu := \int^* \chi_A f \, d\mu$. Então ψ é uma medida exterior em X e $\mathcal{M} \subset \sigma(\psi)$. Além disso, $\psi(A) = 0$ sempre que $\mu(A) = 0$.