

I) Comparação entre as Integrais de Lebesgue e de Riemann

PROPOSIÇÃO 1. Seja $a < b$ reais. Considere o espaço de medida $([a, b], \mathcal{L}|_{[a, b]}, m)$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Defino:

$$s(f) \doteq \left\{ \int \phi : \phi \text{ simples e } \phi \leq f \right\}$$

$$S(f) \doteq \left\{ \int \phi : \phi \text{ simples e } \phi \geq f \right\}$$

Note que $s(f) \neq \emptyset$ e é limitado superiormente, $S(f) \neq \emptyset$ e é limitado inferiormente. Defina $\underline{\int} f \doteq \sup s(f)$ e $\overline{\int} f \doteq \inf S(f)$.

Então, $\underline{\int} f = \overline{\int} f \Leftrightarrow f$ Lebesgue mensurável. Em caso afirmativo,

$$\int_{[a, b]} f = \underline{\int} f = \overline{\int} f$$

PROPOSIÇÃO 2. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada.

(i) Se f for R-integrável, então f é Lebesgue-integrável e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f dm$$

(ii) f é R-integrável see

$$m(\{x \in [a, b] | f \text{ descontínua em } x\}) = 0$$

• Prova:

(i) Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ partição de $[a, b]$. Para $1 \leq i \leq n$: $m_i = \inf\{f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ e $M_i = \sup\{f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$.

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

$$\underline{\int_a^b} f \doteq \sup\{s(f, P) : P \text{ partição de } [a, b]\}$$

$$\overline{\int_a^b} f \doteq \inf\{S(f, P) : P \text{ partição de } [a, b]\}$$

Por hipótese: $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \vdash f$ é Lebesgue-integrável e $\int_{[a, b]} f dm = \int_a^b f$. Com efeito, para cada partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ como anteriormente, definimos:

$$g_P \doteq \sum_{i=1}^n m_i \cdot \chi_{(t_{i-1}, t_i]} \quad (\text{de modo que } \int g_P dp = s(f, P))$$

$$G_P \doteq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \chi_{(t_{i-1}, t_i]} \quad (\because \int G_P dm = S(f, P))$$

Tome $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sequência de partições tais que:

(i) $(\forall i) P_i \subset P_{i+1}$

(ii) $s(f, P_i) \rightarrow \underline{\int_a^b} f$ e $S(f, P_i) \rightarrow \overline{\int_a^b} f$

Tome $g_i \doteq g_{P_i}$ e $G_i \doteq G_{P_i}$, $i \in \mathbb{N}$, de modo que $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é sequência crescente (Se $P \subset Q$, $g_P \leq g_Q$.) e $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é decrescente e $(\forall i) g_i \leq f \leq G_i$ m-q.s. (i.e. as desigualdades valem em todo ponto, exceto, possivelmente, em a , pelo fato de termos tomado intervalos semiabertos à esquerda na definição de g_P e G_P). Tome $g = \lim g_i$ e $G = \lim G_i$ de modo que g e G são borelianas e $g \leq f \leq G$ m-q.s.

Afirmção: g e G são Lebesgue-integráveis e $\int g dm = \int_a^b f$, $\int G = \int_a^b f$. Nesse caso, $\int g dm = \int G dm$, i.e.

$$\int \underbrace{(G - g)}_{\geq 0} dm = 0$$

$\therefore g = G$ m-q.s., $\therefore f = g$ m-q.s., $\therefore f$ é Lebesgue-integrável e

$$\therefore \int_{[a,b]} f dm = \int g dm = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$$

Prova da afirmação: $\exists m = \inf \text{Im} f \in \mathbb{R}$ e $M = \sup \text{Im} f \in \mathbb{R}$ de modo que, $\forall i \in \mathbb{N}$ e m-q.s. em $[a, b]$: $m \leq g_i \leq M$ e $m \leq G_i \leq M$, logo:

$$\begin{aligned} |g_i| &\leq \max\{M, -m\} \cdot \chi_{[a,b]} \\ |G_i| &\leq \max\{M, -m\} \cdot \chi_{[a,b]} \end{aligned}$$

Pelo TCD:

$$\begin{aligned} \int g_i dm &= \underbrace{s(f, P_i)}_{\rightarrow \int_a^b f} \rightarrow \int g dm \\ \int G_i dm &= \underbrace{S(f, P_i)}_{\rightarrow \int_a^b f} \rightarrow \int G dm \end{aligned}$$

Por unicidade do limite, segue

$$\begin{aligned} \int g dm &= \int_a^b f \\ \int G dm &= \int_a^b f \end{aligned}$$

(ii) (Está como exercício na lista 7.)

- Exercício: Pode-se enunciar algo similar a (i) na última proposição para integrais de Riemann impróprias. Por exemplo: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e R-integrável em $[a, b] \forall b > a$. Então, são equivalentes as seguintes condições:

- (i) $\int_a^\infty f$ é absolutamente convergente (i.e. $\int_a^\infty |f| < \infty$).
- (ii) f é Lebesgue-integrável em $[a, \infty)$

Em caso afirmativo, $\int_a^\infty f(x) dx = \int_{[a, \infty)} f dm$ (sugestão: tome uma sequência $b_n \nearrow \infty$ e use os teoremas de convergência para investigar os limites das integrais de $\chi_{[a, b_n]} |f|$ e $\chi_{[a, b_n]} f$.)

- Observação: Disso decorre que, se $\int_a^\infty f$ for condicionalmente convergente, f não é Lebesgue-integrável em $[a, \infty)$.

II) Aplicações do Teorema da Convergência Dominada

TEOREMA 1. Sejam: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall t \in I$, $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Defina:

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int f(x, t) d\mu(x) \end{aligned}$$

(a) Suponha que:

- (i) $\forall x \in X, f(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $t_0 \in I$.
- (ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $\forall (x, t) \in X \times I, |f(x, t)| \leq g(x)$

Então F é contínua em t_0 . Enunciado análogo vale para a continuidade sequencial de F com o parâmetro t num espaço topológico qualquer.

(b) Suponha que:

- (i) $\forall x \in X, f(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável
- (ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $\forall (x, t) \in X \times I,$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right| \leq g(x)$$

Então F é derivável e $\forall t \in I,$

$$F'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) d\mu(x)$$

Em suma:

$$\frac{d}{dt} \int f(x, t) d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) d\mu(x)$$

• Prova:

- (a) Dado $t_0 \in I$, quero mostrar que $F(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t)$, i.e. que

$$\int f(x, t_0) d\mu = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

Com efeito, seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec I$ com $t_n \rightarrow t_0$. Então a sequência de funções $\{f(\cdot, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{L}^1(\mu)$ é pontualmente convergente para $f(\cdot, t_0)$ e $|f(\cdot, t_n)| \leq g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ em X . Pelo TCD,

$$\underbrace{\int f(\cdot, t_n) d\mu}_{F(t_n)} \rightarrow \underbrace{\int f(\cdot, t_0) d\mu}_{F(t_0)}$$

- (b) Note que, fixado $t \in I$, tomando-se $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec I \setminus \{t\}$ com $t_n \rightarrow t$, tem-se: $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} \underbrace{f(x, \cdot)'(t)}_{\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\cdot, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\cdot, t_n) - f(\cdot, t)}{t_n - t}$$

é o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis $\therefore \frac{\partial}{\partial t} f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável. Além disso, $\forall x \in X$, fixado t e tomando $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como acima, pelo TVM, $\exists \tau_n$ entre t e t_n tal que:

$$f(x, t_n) - f(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, \tau_n) \cdot (t_n - t)$$

Daí:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)} &\stackrel{(**)}{=} \frac{\partial}{\partial t} f(x, \tau_n) \end{aligned}$$

e como, $(\forall n),$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, \tau_n) \right| \stackrel{(*)}{\leq} g(x)$$

segue, $(\forall x \in X)$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right| \leq g(x) \quad \left(\because \frac{\partial}{\partial t} f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu) \right)$$

Assim, para esse mesmo t e sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tem-se:

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \frac{\int f(x, t_n) d\mu(x) - \int f(x, t) d\mu}{t_n - t} = \int \underbrace{\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)} d\mu(x)$$

e a convergência é dominada por g , em vista de $(*)$ e $(**)$. Pelo TCD, conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) d\mu(x)$$

Como $(t_n)_n$ em $I \setminus \{t\}$ com $t_n \rightarrow t$ foi tomada de forma arbitrária, conclui-se que

$$\exists \lim_{x \rightarrow t} \frac{F(x) - F(t)}{x - t} = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) d\mu(x)$$

$\therefore F$ derivável em t e

$$F'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) d\mu(x)$$

III) Funções mensuráveis no sentido estendido

DEFINIÇÃO 1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : \text{dom } f \subset X \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Diz-se que f é *mensurável no sentido estendido* ou *mensurável definida q.s.* se:

- (i) $\text{dom } f \in \mathcal{M}$, $\mu[(\text{dom } f)^c] = 0$
- (ii) $f : (\text{dom } f, \mathcal{M}|_{\text{dom } f}) \rightarrow \mathbb{K}$ é mensurável
- Note que toda função $f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{K}$ mensurável no sentido estendido admite uma extensão mensurável $X \rightarrow \mathbb{K}$:
 - (i) Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ for completo, qualquer extensão de f é mensurável
 - (ii) $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $\tilde{f}|_{\text{dom } f} = f$ e $\tilde{f}|_{(\text{dom } f)^c} = 0$. Definição: chama-se *extensão canônica de f* .

DEFINIÇÃO 2. Com a notação da definição acima, seja $f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{K}$ mensurável no sentido estendido. Diz-se que:

- (i) f é quase integrável se $\tilde{f}$ o for. Em caso afirmativo: $\int f \doteq \int \tilde{f}$. Mais geralmente, $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$\int_E f d\mu \doteq \int_E \tilde{f} d\mu = \int \chi_E \tilde{f} d\mu$$

- (ii) f é integrável se $\tilde{f}$ o for.

- (Note que a integral definida acima independe da extensão pois o complementar tem medida nula e a integral não enxerga conjuntos de medida nula.)
- Observação: Daqui em diante, diremos, simplesmente, “mensurável” no lugar de “mensurável no sentido estendido” ou “mensurável definida q.s.”

IV) O espaço de Banach L^1

DEFINIÇÃO 3. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Definimos:

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow [0, \infty)$$

$$f \mapsto \|f\|_1 \doteq \int |f| d\mu$$

- Recorde: $\mathcal{L}^1(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ integrável}\}$

PROPOSIÇÃO 3. Com a notação acima, $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$:

- (i) $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$
- (ii) [desigualdade triangular]: $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

- Prova:

(i)

$$\|\alpha f\|_1 = \int \underbrace{|\alpha f|}_{=|\alpha||f|} d\mu = |\alpha| \int |f| = |\alpha| \|f\|_1$$

(ii)

$$\|f + g\|_1 = \int \underbrace{|f + g|}_{\leq |f| + |g|} \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

- Assim, $\|\cdot\|_1$ é uma seminorma, no sentido da:

DEFINIÇÃO 4. Sejam E $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$:

- (i) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)

$\|\cdot\|$ chama-se uma seminorma em E . Diz-se que $\|\cdot\|$ é uma norma se for uma seminorma tal que $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. Um espaço normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $\|\cdot\|$ norma em E .

- Observação: Todo espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico com a métrica

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

- (Para quem achar que precisa revisar Topologia Geral: estudar capítulos 4 e 5 do Folland.)

DEFINIÇÃO 5. Um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ diz-se um espaço de Banach se for completo com a métrica induzida por $\|\cdot\|$.

IV.1) Como construir um espaço normado a partir de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial munido de uma seminorma

PROPOSIÇÃO 4. Dados E $\mathbb{K}$ -e.v. e $\|\cdot\|$ seminorma em E , $N \doteq \{x \in E \mid \|x\| = 0\}$ é $\mathbb{K}$ -subespaço vetorial de E .

- Prova: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in N$, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\alpha x + \beta y\| &\stackrel{\text{des.}\Delta}{\leq} \underbrace{\|\alpha x\|}_{=|\alpha| \underbrace{\|x\|}_{=0}} + \underbrace{\|\beta y\|}_{=|\beta| \underbrace{\|y\|}_{=0}} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \|\alpha x + \beta y\| = 0 \therefore \alpha x + \beta y \in N.$$

DEFINIÇÃO 6 (quociente). Sejam E $\mathbb{K}$ -e.v. e $F \subset E$ $\mathbb{K}$ -subespaço de E .

- Como conjunto,

$$E/F \doteq E / \sim$$

onde $x \sim y \doteq x - y \in F$. Ou seja,

$$E/F = \{[e] = \{e\} + F : e \in E\} \subset \mathbb{P}(E)$$

- A estrutura de $\mathbb{K}$ -e.v. em E/F é definida por:

$$\begin{aligned} E/F \times E/F &\xrightarrow{+} E/F \\ (x + F, y + F) &\mapsto (x + y) + F \\ \mathbb{K} \times E/F &\xrightarrow{\cdot} E/F \\ (\alpha, x + F) &\mapsto \alpha x + F \end{aligned}$$

- Exercício: Verifique que as operações acima estão bem definidas e, com essas operações, E/F é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, chamado quociente de E por F . Verifique que:

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{\pi} E/F \\ x &\mapsto x + F \end{aligned}$$

é linear e sobre E/F .

- Diagrama (*):

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \downarrow \pi & \searrow \|\cdot\| & \\ E/N & \xrightarrow{\|\cdot\|} & [0, \infty) \end{array}$$

PROPOSIÇÃO 5. Sejam E $\mathbb{K}$ -e.v., $\|\cdot\|$ seminorma em E , $N = \{x \in E \mid \|x\| = 0\}$. Então existe uma única função $\|\cdot\| : E/N \rightarrow [0, \infty)$ que completa o diagrama (*) (i.e. torna o diagrama comutativo). Além disso, $\|\cdot\|$ é uma norma em E/N (chama-se norma induzida por $\|\cdot\|$). Doravante, usaremos a mesma notação para a seminorma e para a norma induzida).

Demonstração. A unicidade é clara. Para a existência, ponha $\|x + N\| \doteq \|x\|$; verifique que está bem definida e é uma norma. $\square$

- A construção acima vale, em particular, dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, para $E = \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow [0, \infty)$. Nesse caso:

1. $N = \{f \in \mathcal{L}^1(\mu) \mid \|f\|_1 = 0\} = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} \mid f = 0 \text{ } \mu\text{-q.s.}\}$
2. Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$$[f] = f + N = \{g : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} \mid g = f \text{ } \mu\text{-q.s.}\}$$

3. **Definição:** $L^1(\mu) \doteq \mathcal{L}^1(\mu)/N$

$$\|\cdot\|_1 : L^1(\mu) \rightarrow [0, \infty)$$

chama-se “norma L^1 ” ou “norma 1” (e de fato é uma norma, como visto acima). Assim, $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado.

LEMA 1. Se $(E, \|\cdot\|)$ espaço vetorial normado (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). São equivalentes:

- (i) $(E, \|\cdot\|)$ é completo (i.e. toda sequência de Cauchy é convergente.)
- (ii) Toda série absolutamente convergente em E é convergente.

- Prova:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série absolutamente convergente em E (i.e. tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$). Tome, $(\forall n)$, $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Então, $\forall n, m$ com $m < n$:

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \stackrel{\text{des } \triangle}{\leq} \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$\therefore (s_n)_n$ é de Cauchy em $E \therefore (s_n)_n$ é convergente.

- (ii)⇒(i) Tome $(x_n)_n \prec E$ de Cauchy. $\vdash (x_n)_n$ é convergente e, para tal, basta verificar que $(x_n)_n$ possui uma subsequência convergente. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_k, \|x_m - x_n\| < 2^{-k}$. Sem perda de generalidade (SPG) assumamos que $(n_k)_k$ é crescente. Tome $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dada por $(\forall k)y_k = x_{n_k}$. Afirimo que essa é uma subsequência convergente de $(x_n)_n$. Com efeito, $\forall k > 1$,

$$\left\| \underbrace{y_k}_{= x_{n_k}} - \underbrace{y_{k-1}}_{= x_{n_{k-1}}} \right\| < 2^{-(k-1)}$$

Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec E$ dada por:

$$\begin{aligned} z_1 &\doteq y_1 \\ z_n &\doteq y_n - y_{n-1}, \text{ para } n > 1 \end{aligned}$$

Note que, $\forall n > 1$, $\sum_{k=1}^n z_k = y_n$ e $\|z_n\| = \|y_n - y_{n-1}\| < 2^{-(n-1)}$. Como $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} < \infty$, segue $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|z_n\| < \infty$ e, pela hipótese (ii), $\sum z_n$ é convergente $\therefore (y_n)_n$ é convergente.

TEOREMA 2. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Então, $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach.

- Observação: A mesma construção e um teorema análogo valem para $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \doteq \{f : X \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ é integrável}\}$ (que é um $\mathbb{R}$ -e.v.), com a seminorma $\|\cdot\|_1$.
- Prova do teorema: Tome $([f_n])_{n \in \mathbb{N}} \prec L^1(\mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\|[f_n]\|_1}_{=\|f_n\|_1} < \infty$$

$\vdash \sum_{n=1}^{\infty} [f_n]$ é convergente em L^1 , i.e. $\exists [g] \in L^1(\mu)$ tal que $\sum_{k=1}^n [f_k] \rightarrow [g]$ em $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$. Com efeito, tome $G : X \rightarrow [0, \infty]$ dada por $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, i.e. $G = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$. Então $G \in L^+$ e, pelo TCM, tem-se:

$$\int G d\mu = \int \sum_n |f_n| d\mu \stackrel{\text{TCM}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\int |f_n| d\mu}_{=\|f_n\|_1} < \infty$$

$\therefore G$ é integrável e, em particular, finita quase sempre. Assim, $\exists N \in \mathcal{M} | \mu(N^c) = 0$ e $(\forall x \in N) G(x) < \infty$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$, logo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$. Tome:

$$\begin{aligned} g &: X \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) & \text{se } x \in N \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \end{aligned}$$

Então g é mensurável, pois $g|_N$ e $g|_{N^c}$ o são. Além disso, $(\forall x \in X) |g(x)| \leq G(x)$ e, como G é integrável, g também o é, i.e. $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Afirimo que $\sum_{k=1}^n [f_k] \rightarrow [g]$ em $L^1(\mu)$, i.e. $\|[g] - \sum_{k=1}^n [f_k]\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. De fato:

$$\begin{aligned} \left\| [g] - \sum_{k=1}^n [f_k] \right\|_1 &= \left\| [g - \sum_{k=1}^n f_k] \right\|_1 = \left\| g - \sum_{k=1}^n f_k \right\|_1 = \int |g - \sum_{k=1}^n f_k| d\mu = \\ &= \int \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right| d\mu \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int |f_k| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

pois $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$.

- Notação: doravante, usaremos a mesma notação “ $L^1(\mu)$ ” para denotar $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)/N$ (cujos elementos são classes de equivalência de funções integráveis). Desse modo, “ $f \in L^1(\mu)$ ” poderá significar “ $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ integrável” ou a classe de equivalência de uma tal f módulo funções mensuráveis nulas μ -q.s., i.e. $\{g : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} | g = f \mu\text{-q.s.}\}$.

PROPOSIÇÃO 6. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $Y \doteq \{\varphi : X \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ simples e integrável}\}$. Então Y é denso em $L^1(\mu)$.

- Prova: Tome $f \in L^1(\mu)$. $\vdash \exists (\varphi_n)_n$ sequência de funções simples integráveis tal que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ (de modo que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[\varphi_{n_0}] \in B_\varepsilon([f])$, donde a densidade afirmada). Com efeito, existe $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções simples $X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{p} f$ e $(\forall n) |\varphi_n| \leq |\varphi_{n+1}| \leq |f|$. Assim, $\varphi_n - f \xrightarrow{p} 0$ e $(\forall n) |\varphi_n - f| \leq |\varphi_n| + |f| \leq 2|f|$ de modo que $\|\varphi_n - f\|_1 = \int |\varphi_n - f| d\mu \rightarrow 0$, pelo TCD.

COROLÁRIO 1. Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ com μ medida de Lebesgue-Stieltjes. Tem-se:

- (i) $\tilde{Y} \doteq \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ simples integrável da forma } \sum_{i=1}^n a_i \chi_{I_i}, \text{ com } (\forall i) I_i \text{ intervalo aberto}\}$ é denso em $L^1(\mu)$
- (ii) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ contínua tal que } \text{supp } f \doteq \overline{\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}} \subset \subset \mathbb{R}\}$ (i.e. o conjunto das funções contínuas com suporte compacto) é denso em $L^1(\mu)$.

- Exercício: Sejam $[a, b]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $C^0([a, b], \mathbb{C}) \doteq \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ contínua}\}$ e

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : C^0([a, b], \mathbb{C}) &\rightarrow [0, \infty) \\ f &\mapsto \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

Então $(C^0([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado e seu completamento é $(L^1([a, b], \mathcal{B}_{[a, b]}, m), \|\cdot\|_1)$.

- Dica para o exercício: Tome $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrável, de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \end{aligned}$$

é um elemento de $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ e use (ii) do corolário anterior.

- Prova do corolário:

- (i) Basta provar que, $\forall \varepsilon > 0$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ simples integrável, $\exists \psi \in \tilde{Y}$ tal que $\|\varphi - \psi\|_1 < \varepsilon$. Seja $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ na representação padrão de modo que $|\varphi| = \sum_{i=1}^n |a_i| \chi_{E_i}$ e

$$\infty > \int |\varphi| d\mu \stackrel{(\forall i)}{\geq} \int \chi_{E_i} |\varphi| = |a_i| \mu(E_i)$$

e, portanto, $\mu(E_i) < \infty$ se $a_i \neq 0$. Dado $\varepsilon' > 0$ (a ser escolhido posteriormente), posso, $\forall i$ tal que $a_i \neq 0$, tomar J_i uma união finita disjunta de intervalos abertos tal que $\mu(J_i \Delta E_i) < \varepsilon'$ (vide última proposição da lista de propriedades de regularidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes). Ou seja:

$$\|\chi_{E_i} - \chi_{J_i}\|_1 = \int \chi_{J_i \Delta E_i} d\mu < \varepsilon'.$$

Tome $\psi \doteq \sum_{i=1}^n a_i \chi_{J_i} \in \tilde{Y}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \underbrace{\|\varphi - \psi\|_1}_{\substack{\text{des } \triangle \\ \leq}} &\leq \sum_{i=1}^n |a_i| \underbrace{\|\chi_{E_i} - \chi_{J_i}\|_1}_{< \varepsilon'} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right) \varepsilon' \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (\chi_{E_i} - \chi_{J_i}) \end{aligned}$$

Agora basta escolher ε' tal que

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{(\sum_{i=1}^n |a_i|) + 1}$$

e segue a tese.

- (ii) Para cada intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ de medida μ finita, aproxime χ_J na norma 1 por uma função contínua de suporte compacto, e a seguir aplique a parte (i).