

I) Integrais de Funções Positivas (continuação)

TEOREMA 1 (Lema de Fatou). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^+$. Então

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$$

COROLÁRIO 1. Se $(f_n)_n \prec L^+$ e $f_n \xrightarrow{p} f (\in L^+)$

$$\int f \leq \liminf \int f_n$$

Prova:

$$\int f = \int \lim f_n = \int \liminf f_n \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int f_n$$

Prova do Lema de Fatou:

$$\liminf f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\inf_{k \geq n} f_k}_{\doteq g_n}$$

Note que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência crescente em L^+ . Pelo TCM

$$\int \liminf f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \stackrel{\text{TCM}}{=} \lim \int g_n \leq \liminf \int f_n$$

Exercício: (a integral não enxerga conjuntos de medida nula)

1) Dada $f \in L^+$,

$$\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

2) Dadas $f, g \in L^+$, são equivalentes:

$$(i) \quad \forall E \in \mathcal{M}, \int_E f = \int_E g$$

$$(ii) \quad f = g \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

3) Nos teoremas de convergência (i.e., TCM, lema de Fatou e TCD, a ser visto) convergência pontual pode ser substituída por convergência μ -q.s.

Exemplo: se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^+$, $f \in L^+$, $f_n \xrightarrow{p} f$ μ -q.s., então $\int f_n \nearrow \int f$.

I.1) Integral de funções a valores em $\mathbb{R}$

DEFINIÇÃO 1. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Dada $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, diz-se que:

- f é *quase-integrável* se $\int f^+ < \infty$ ou $\int f^- < \infty$. Nesse caso, $\int f \doteq \int f^+ - \int f^-$.
- f é *integrável* se $\int f^+ < \infty$ e $\int f^- < \infty$.

PROPOSIÇÃO 1. Com a notação acima, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável é integrável $\Leftrightarrow |f|$ o for, i.e. $\int |f| < \infty$.

DEFINIÇÃO 2. Com a notação acima,

$$\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \doteq \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrável}\}$$

PROPOSIÇÃO 2. Com a notação acima, $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ é $\mathbb{R}$ -subespaço vetorial de $\mathbb{R}^X$ e $\int \cdot : \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear.

- Prova:

1. Se $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$$

$\therefore \alpha f + \beta g$ é mensurável e

$$\int |\alpha f + \beta g| \leq \int |\alpha||f| + |\beta||g| = |\alpha| \int |f| + |\beta| \int |g| < \infty$$

o que mostra $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ $\therefore \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ é $\mathbb{R}$ -subespaço de $\mathbb{R}^X$.

2. Afirmação: $\forall c \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}), \int cf = c \int f$. Com efeito:

(i) Se $c = 0$, trivial

(ii) Se $c \neq 0$:

$$* \text{ Se } c > 0, (cf)^+ = cf^+, (cf)^- = cf^-$$

$$* \text{ Se } c < 0, (cf)^+ = [(-c)(-f)]^+ = (-c)(-f)^+ = -cf^-, (cf)^- = -cf^+ \quad ((-f)^+ = \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\} = f^-, \text{ analogamente } (-f)^- = f^+.)$$

Assim, em qualquer dos casos, decorre da definição da integral e do fato de que a integral de função positiva é positivamente homogênea que $\int cf = c \int f$.

3. Afirmação: $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}), \int(f+g) = \int f + \int g$. Prova:

$$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ g = g^+ - g^- \end{cases}$$

Seja $h \doteq f + g, h = h^+ - h^-$. Tem-se:

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^- \\ \therefore \int h^+ + \int f^- + \int g^- &= \int f^+ + \int g^+ + \int h^- \quad (\text{pois } \int \cdot \text{ é aditiva em } L^+) \\ \therefore \int h^+ - \int h^- &= \left(\int f^+ - \int f^- \right) + \int g^+ - \int g^- \end{aligned}$$

I.2) Integral de funções a valores em $\mathbb{C}$

DEFINIÇÃO 3 (Integral de funções a valores em $\mathbb{C}$). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável. f diz-se integrável se $\int |f| < \infty$.

PROPOSIÇÃO 3. Com a notação acima, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável $\Leftrightarrow \operatorname{Re} f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o forem.

- Prova: Basta observar que:

$$|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \leq 2|f|$$

(pois, $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 2|z|$).

DEFINIÇÃO 4. Com a notação acima, se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ integrável,

$$\int f \doteq \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$$

DEFINIÇÃO 5. Com a notação acima:

$$\mathcal{L}^1(\mu) \doteq \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ integrável}\}$$

PROPOSIÇÃO 4. Com a notação acima, $\mathcal{L}^1(\mu)$ é $\mathbb{C}$ -subespaço vetorial $\mathbb{C}^X$ e $\int \cdot : \mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ é linear.

- Prova:

1. Se $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$$

$\therefore \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

2. A linearidade decorre da linearidade da integral de funções a valores em $\mathbb{R}$ e da definição de $\int \cdot$ para funções $X \rightarrow \mathbb{C}$.

PROPOSIÇÃO 5 (Desigualdade tringular integral). Com a notação acima, se $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, então

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

- Prova: Tome $\alpha \doteq \text{sgn}(\int f d\mu)$ de modo que

$$\left| \int f d\mu \right| = \bar{\alpha} \int f d\mu = \int \bar{\alpha} f = \int \text{Re}(\bar{\alpha} f) \stackrel{(*)}{\leq} \int |\text{Re}(\bar{\alpha} f)| \stackrel{\text{monotonicidade}}{\leq} \int |\bar{\alpha} f|$$

$$\text{Prova de } (*): \forall g: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrável, } \int g = \int g^+ - \int g^- \leq \int g^+ + \int g^- = \int |g|$$

- Se $\int f d\mu \neq 0$, $|\bar{\alpha}| = 1 \therefore \int |\bar{\alpha} f| = \int |f| \therefore \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f|$
- Se $\int f d\mu = 0$, então $\left| \int f d\mu \right| = 0 \leq \int |f| d\mu$

I.3) Teorema da Convergência Dominada

TEOREMA 2 (da convergência dominada de Lebesgue). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C})$ e $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f_n \xrightarrow{p} f$ e $\exists g: X \rightarrow [0, \infty] \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) |f_n| \leq g$. Então, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\int f_n \rightarrow \int f$.

- Prova:

1. É claro que $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável (pois $f = \lim f_n$) e

$$\begin{aligned} |f| &= |\lim f_n| = \lim \underbrace{|f_n|}_{\leq g} \leq g \\ \therefore \int |f| &\leq \int g < \infty \\ \therefore f &\in \mathcal{L}^1(\mu) \end{aligned}$$

2. Resta verificar $\int f_n \rightarrow \int f$, i.e., $\int \text{Re } f_n \rightarrow \int \text{Re } f$ e $\int \text{Im } f_n \rightarrow \int \text{Im } f$. Como $\text{Re } f_n \xrightarrow{p} \text{Re } f$ e $\text{Im } f_n \xrightarrow{p} \text{Im } f$ e $|\text{Re } f_n| \leq g$ e $|\text{Im } f_n| \leq g$ basta provar o caso em que as funções tomam valores em $\mathbb{R}$, i.e., $(\forall n) f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow{p} f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $(\forall n) \max\{f_n, -f_n\} = |f_n| \leq g$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g - f_n \geq 0$ e $g + f_n \geq 0$. Logo, pelo lema de Fatou:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int \underbrace{\underline{\lim}(g - f_n)}_{= g + \underbrace{\underline{\lim}(-f_n)}_{= -f}} &\stackrel{\text{LF}}{\leq} \underline{\lim} \underbrace{\int (g - f_n)}_{= \int g - \int f_n} \\ \text{(ii)} \quad \int \underbrace{\underline{\lim}(g + f_n)}_{= g + \underbrace{\underline{\lim} f_n}_{= f}} &\stackrel{\text{LF}}{\leq} \underline{\lim} \underbrace{\int (g + f_n)}_{= \int g + \int f_n} \end{aligned}$$

De (i):

$$\int g - \int f \leq \underline{\lim} \left(\int g - \int f_n \right) = \int g + \underline{\lim} \left(- \int f_n \right) = \int g - \overline{\lim} \int f_n$$

e, como, $\int g < \infty$, segue: $\overline{\lim} \int f_n \leq \int f$.

De (ii):

$$\begin{aligned} \int g + \int f &\leq \underline{\lim} \left(\int g + \int f_n \right) = \int g + \underline{\lim} \int f_n \\ \therefore \int f &\leq \underline{\lim} \int f_n \\ \therefore \overline{\lim} \int f_n &\leq \int f \leq \underline{\lim} \int f_n \\ \therefore \overline{\lim} \int f_n &= \underline{\lim} \int f_n = \int f \end{aligned}$$

- Exercícios: Fixe $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida.

1. Se $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrável, $\{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ é nulo e $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ é σ -finito.
2. Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ integrável, $\{x \in X, f(x) \neq 0\}$ é σ -finito.
3. A integral “não enxerga conjuntos nulos”, i.e.:
 - (i) Dadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ integráveis, são equivalentes:
 - (a) $\int |f - g| = 0$
 - (b) $\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f = \int_E g$
 - (c) $f = g$ μ -q.s.
 - (ii) No teorema da convergência dominada, podemos substituir convergência pontual por convergência μ -q.s., i.e., se

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sequência de funções mensuráveis } X \rightarrow \mathbb{C} \\ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} \\ f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-q.s.} \\ g \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ e } (\forall n) |f_n| \leq g \text{ } \mu\text{-q.s.} \end{array} \right.$$

então $\int f_n \rightarrow \int f$.

4. A integral é compatível com restrições:

$$\text{Tome } \left\{ \begin{array}{l} E \in \mathcal{M} \\ \mathcal{M}|_E = \{F \in \mathcal{M} | F \subset E\} \\ \mu|_E : \mathcal{M}|_E \rightarrow [0, \infty] \\ F \mapsto \mu(F) \end{array} \right.$$

Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ for integrável em E i.e. $\chi_E \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, então $f|_E \in \mathcal{L}^1(\mu|_E)$ e $\int_E f d\mu = \int f|_E d(\mu|_E)$.