

I) Integrais de Funções Positivas

- Fixaremos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

DEFINIÇÃO 1. $L^+ \doteq \{f : X \rightarrow [0, \infty] \text{ mensurável}\}$

DEFINIÇÃO 2. Seja $\phi \in L^+$, simples. Seja $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ a representação padrão de ϕ (i.e., $\text{Im } \phi = \{a_1, \dots, a_n\}$ com $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$, $E_i = \phi^{-1}(\{a_i\})$, $1 \leq i \leq n$). A *integral* de ϕ é $\sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \in [0, \infty]$.

- Notações:

$$\int \phi d\mu, \quad \int \phi, \quad \int \phi(x) d\mu(x), \quad \int \phi(x) \mu(dx)$$

- Se $A \in \mathcal{M}$:

$$\int_A \phi d\mu \doteq \int \chi_A \phi d\mu$$

PROPOSIÇÃO 1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $\phi, \psi \in L^+$ simples, $c \geq 0$. Tem-se:

- (i) $\int c\phi = c \int \phi$
- (ii) $\int \phi + \psi = \int \phi + \int \psi$
- (iii) Se $\phi \leq \psi$, $\int \phi \leq \int \psi$

- Prova:

- (a) É claro se $c = 0$. Se $c > 0$ e se $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ representação padrão de ϕ , a representação padrão de $c\phi = \sum_{i=1}^n ca_i \chi_{E_i}$ e aí a igualdade é clara também.
- (b) Sejam $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, $\psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j}$, $\phi + \psi = \sum_{k=1}^l c_k \chi_{G_k}$ representações padrão de ϕ , ψ e $\phi + \psi$, respectivamente. Note:

$$\dot{\bigcup}_{i=1}^n E_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^m F_j = \dot{\bigcup}_{k=1}^l G_k = X$$

(por definição de representação padrão). Tem-se:

1)

$$\int \phi = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \quad \begin{array}{c} = \\ \uparrow \\ E_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^m E_i \cap F_j \end{array} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(E_i \cap F_j)$$

2) Analogamente,

$$\int \psi = \sum_{j=1}^m b_j \mu(F_j) = \sum_{i,j} b_j \mu(F_j \cap E_i)$$

De 1) e 2):

$$\int \phi + \int \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \mu(E_i \cap F_j)$$

3)

$$\int \phi + \psi = \sum_{k=1}^l c_k \mu(G_k) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i,j,k} c_k \mu(G_k \cap E_i \cap F_j) \quad (**)$$

(*) note que:

$$\bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} E_i \cap F_j = X$$

$$\therefore \forall k, G_k = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (G_k \cap E_i \cap F_j)$$

Ora, $\forall i, j, k | E_i \cap F_j \cap G_k \neq \emptyset$, $c_k = a_i + b_j$ (pois, se $x \in E_i \cap F_j \cap G_k$, $\phi(x) = a_i$, $\psi(x) = b_j$ e $(\phi + \psi)(x) = c_k$). Daí, $\forall i, j, k$:

$$c_k \mu(G_k \cap E_i \cap F_j) = (a_i + b_j) \mu(G_k \cap E_i \cap F_j)$$

$$\therefore (**) = \sum_{i,j,k} (a_i + b_j) \mu(G_k \cap E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{k=1}^l (a_i + b_j) \mu(G_k \cap E_i \cap F_j) \right)}_{= \mu(E_i \cap F_j)} = \int (\phi + \psi)$$

(c) Sejam $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ e $\psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j}$ (representação padrão) com $\phi \leq \psi \vdash \int \phi \leq \int \psi$
Tem-se:

$$\int \phi = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(E_i \cap F_j) \stackrel{\text{afirmação}}{\leq} \sum_{i,j} b_j \mu(E_i \cap F_j) = \int \psi$$

Afirmção: $(\forall i, j) a_i \mu(E_i \cap F_j) \leq b_j \mu(E_i \cap F_j)$

Prova da afirmação: Se $E_i \cap F_j = \emptyset$, $0 \leq 0$. Se $E_i \cap F_j \neq \emptyset$, tome $x \in E_i \cap F_j$, $a_i = \phi(x) \leq \psi(x) = b_j$

COROLÁRIO 1.

(i) Se $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n} \prec L^+$, ϕ_i simples, então

$$\int \sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \int \phi_i$$

Basta usar (ii) da proposição anterior e indução sobre n .

(ii) Seja $\phi \in L^+$ simples e $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ (não necessariamente a representação padrão), com $(\forall i) a_i \geq 0$.
Então

$$\int \phi = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i)$$

Basta aplicar o item anterior com $\phi_i = a_i \chi_{E_i}$ para $1 \leq i \leq n$.

PROPOSIÇÃO 2. Seja $\phi \in L^+$ simples. Então $E \in \mathcal{M} \mapsto \int_E \phi \in [0, \infty]$ é uma medida.

• Prova: Seja $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ representação padrão

1) Se $E = \emptyset$

$$\int_{\emptyset} \phi = \int \chi_{\emptyset} \phi = \int 0 = 0$$

2) Sejam $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, $A = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \int_A \phi &= \int \chi_A \phi = \int \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\chi_A \chi_{E_i}}_{= \chi_{A \cap E_i}} \stackrel{\text{cor. 1}}{=} \sum_{i=1}^n a_i \mu \underbrace{(A \cap E_i)}_{= \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} (E_i \cap A_n)} \stackrel{\mu \text{ } \sigma \text{ aditivo!}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{n \in \mathbb{N}} a_i \mu(E_i \cap A_n) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i \cap A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\chi_{E_i \cap A_n}}_{\chi_{E_i} \chi_{A_n}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \chi_{A_n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \right)}_{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} \phi \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 3. Para $f \in L^+$

$$\int f = \sup \left\{ \int \phi : \phi \in L^+ \text{ simples, } \phi \leq f \right\} \in [0, \infty]$$

- Observação: Se $\phi \in L^+$ simples

$$\begin{aligned} \int_{\text{nova}} \phi &= \sup \left\{ \int_{\text{antiga}} \psi : \psi \in L^+ \text{ simples } \psi \leq \phi \right\} \\ \therefore \int_{\text{antiga}} \phi &\leq \int_{\text{nova}} \phi \end{aligned}$$

e, $\forall \psi \in L^+$ simples com $\psi \leq \phi$,

$$\begin{aligned} \int_{\text{antiga}} \psi &\stackrel{\text{por (iii)}}{\leq} \int_{\text{antiga}} \phi \\ \therefore \int_{\text{nova}} \phi &= \sup \left\{ \int_{\text{antiga}} \psi : \psi \in L^+ \text{ simples, } \psi \leq \phi \right\} \leq \int_{\text{antiga}} \phi \\ \therefore \int_{\text{antiga}} \phi &= \int_{\text{nova}} \phi \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 3. $\forall f, g \in L^+, \forall c \in [0, \infty)$:

- (1) $\int cf = c \int f$
- (2) Se $f \leq g$, $\int f \leq \int g$

DEFINIÇÃO 4. Se $f \in L^+, A \in \mathcal{M}$

$$\int_A f \doteq \int f \chi_A$$

DEFINIÇÃO 5. Diz-se que $f \in L^+$ é integrável (ou somável) se $\int f < \infty$

TEOREMA 1 (Teorema da convergência monótona). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^+$ sequência crescente. Então,

$$\int \underbrace{\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n}_{\in L^+} = \lim \int f_n$$

- (O que garante este teorema é o fato de a medida ser enumeravelmente aditiva!)
- Prova: Note que, por monotonicidade da $\int \cdot$, $(\int f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec [0, \infty]$ é seq crescente

$$\therefore \exists \ell \lim \int f_n = \sup \left\{ \int f_n : n \in \mathbb{N} \right\} \in [0, \infty]$$

Seja $f = \lim f_n \in L^+, \vdash \int f = \ell$

Como $(\forall n) f_n \leq f$, por monotonicidade $\int f_n \leq \int f$

$$\therefore \ell = \lim \int f_n \leq \int f = \sup \left\{ \int \phi : \phi \in L^+ \text{ simples, } \phi \leq f \right\}$$

$\vdash \forall \phi \in L^+$ simples com $\phi \leq f$, tem-se $\ell = \lim \int f_n \geq \int \phi$.

Seja $\phi \in L^+$ simples com $\phi \leq f$. Tome $\alpha \in (0, 1)$. Então, $\forall x \in X$, ou $f(x) = 0$ ou $\alpha\phi(x) < f(x)$. No primeiro caso, $(\forall n) f_n(x) = 0 = \phi(x)$ e, no segundo, como $f_n(x) \nearrow f(x) > \alpha\phi(x)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} | f_{n_0}(x) \geq \alpha\phi(x)$. Assim, tomando, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$E_n \doteq \{x \in X | f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\} \in \mathcal{M}$$

Tem-se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente em $\mathcal{M}$ e $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = X$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int f_n &\geq \int f_n \chi_{E_n} = \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} \alpha\phi = \alpha \int_{E_n} \phi \rightarrow \alpha \int \phi \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \int_X \phi(*) \end{aligned}$$

(*) pois $\mathcal{M} \rightarrow [0, \infty], E \mapsto \int_E \phi$ é medida

$$\therefore \ell = \lim \int f_n \geq \alpha \int \phi$$

Como isso vale $\forall \alpha \in (0, 1)$, conclui-se que

$$\ell \geq \sup \left\{ \alpha \int \phi : \alpha \in (0, 1) \right\} = \int \phi$$

Ou seja, $\ell = \lim \int f_n$ é cota superior de $\{\int \phi : \phi \in L^+ \text{ simples com } \phi \leq f\} \therefore \ell \geq \int f$. Então $\ell = \int f$
(Usamos fortemente o fato de $E \in \mathcal{M} \mapsto \int_E \phi$ ser medida.)

COROLÁRIO 2. Seja $(f_n)_n$ sequência em L^+ (finita ou infinita). Então,

$$\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$$

Prova:

1) Para sequências finitas. Basta provar para dois somandos, digamos, f e $g \in L^+$.

Tome $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente de funções em L^+ simples tal que $\phi_n \nearrow^p f$ e $(\psi_n)_n$ seq crescente em L^+ simples com $\psi_n \nearrow \psi$. Então $(\phi_n + \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente em L^+ simples e $(\phi_n + \psi_n) \nearrow (f + g)$. Então:

$$\int f + \int g \stackrel{\text{TCM}}{=} \underbrace{\lim \int \phi_n}_{=\int f} + \underbrace{\lim \int \psi_n}_{=\int g} = \lim \underbrace{\left(\int \phi_n + \int \psi_n \right)}_{=\int (\phi_n + \psi_n)} = \int (f + g)$$

2) Para sequência infinita $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^+$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n}_{g_k} &\stackrel{\text{TCM}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int \sum_{n=0}^k f_n}_{g_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \int f_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^k f_n}_{g_k} \stackrel{1)}{=} \sum_{n=0}^k \int f_n \end{aligned}$$