MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798
Notas da Aula 6 (6/4)

I) Aplicações Mensuráveis (continuação).

I.1) Funções Simples

Definição 1. Sejam X um conjunto e $A \subset X$

$$\begin{aligned} \chi_A : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases} \end{aligned}$$

chama-se *indicatriz* ou *função característica* de A.

- Exercício: Se $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $A \subset X$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \chi_A$ mensurável.

Definição 2. Seja $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável. Uma função em X diz-se *simples* se for uma combinação linear finita, com coeficientes em $\mathbb{C}$, de funções características de mensuráveis (i.e., uma função da forma $\sum_{i=0}^{n} c_i\, \chi_{A_i}$, com $(A_i)_{0 \leq i \leq n} \prec \mathcal{A}$).

- Ideia: Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $\phi = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \chi_{A_i}$ simples. Definiremos

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \mu(A_i)$$

e, para $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, definiremos $\int f d\mu$ aproximando f por funções simples.

Proposição 1. Sejam $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $\phi : X \to \mathbb{C}$. Então, são equivalentes:

(i) ϕ é simples.

(ii) ϕ é mensurável e $\mathrm{Im}\, \phi$ é finita.

- Prova:
  - (i)⇒(ii) é claro.
  - (ii)⇒(i) Seja ϕ mensurável.

$$\mathrm{Im}\phi = \underbrace{\{c_0, c_1, ..., c_n\}}_{\text{2 a 2 distintos}}$$

Então

$$\phi = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} c_j\, \chi_{\phi^{-1}(\{c_j\})}}_{(*)}$$

$\therefore\ \phi$ é simples

Definição 3. Com a notação acima, $(*)$ chama-se *representação padrão* de ϕ.

Corolário 1. Se f, g simples e $\alpha \in \mathbb{C}$, então $f + g$, $f \cdot g$, αf também são simples.

Teorema 1 (Aproximação de funções mensuráveis por funções simples). Fixe $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável.

(a) Seja $f : X \to [0, \infty]$ mensurável. Existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente de funções simples $X \to [0, \infty]$ tal que $\phi_n(x) \nearrow f(x)$, $\forall x \in X$. Além disso, se $A \subset X$ tal que $\mathrm{Im}\ f|_A$ é limitada em $\mathbb{R}$, então $\phi_n|_A \xrightarrow{u} f|_A$.

(b) Seja $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções simples $X \to \mathbb{C}$ tal que:

   (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |\phi_n| \leq |\phi_{n+1}| \leq |f|$.

(ii) $\phi_n \xrightarrow{p.} f$ e, $\forall A \subset X$ tal que $f|_A$ limitado, $\phi_n|_A \xrightarrow{u.} f|_A$.

- Prova:

(a) Tome, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n : X \to [0,\infty)$$
$$x \mapsto \begin{cases} k2^{-n} & \text{se } k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n} \text{ para } k \in \{0,...,2^{2n}-1\} \\ 2^n & \text{se } 2^n < f(x) \\ 0 & \text{se } f(x) = 0 \end{cases}$$
$$\text{i.e. } \phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n}\chi_{\{k2^{-n}<f\leq(k+1)2^{-n}\}} + 2^n\chi_{\{f>2^n\}}$$

A sequência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assim definida cumpre as condições do enunciado, o que decorre dos seguintes fatos:

1) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1} \leq f$ (verifique!)
2) Se $x \in X$ é tal que $f(x) = \infty$, $\phi_n(x) = 2^n \to \infty = f(x)$
3) Se $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ são tais que $f(x) \leq 2^n$, tem-se $0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq 2^{-n}$ (verifique que isso implica $\phi_n(x) \to f(x)$ e a convergência é uniforme onde f é limitada, a valores em $\mathbb{R}$)

(b) Tome $\varphi^{\pm} = (\text{Re } f)^{\pm}$, $\psi^{\pm} = (\text{Im } f)^{\pm}$. Tome $(\varphi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções simples: $X \to [0,\infty)$ obtidas aplicando-se (a) para $\varphi^{\pm}$ e $\psi^{\pm}$, respectivamente. Verifique que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $(\forall n)$

$$\phi_n = (\varphi_n^+ - \varphi_n^-) + i(\psi_n^+ - \psi_n^-)$$

satisfaz o enunciado em (b).

- Exercício: Sejam $(X,\mathcal{M})$ espaço mensurável, $f : X \to [0,\infty]$ mensurável, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec (0,\infty)$, $r_n \to 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} r_i = \infty$. Então, $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} r_n \chi_{A_n} = f$.