MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 5 (01/04)`

I) Medidas de Radon em $\mathbb{R}$ (continuação).

`I.1) Propriedades de regularidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes.` Sejam:

- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita
- $\mu_0 : \mathcal{A}(H) \to [0, \infty]$ induzida por F (i.e., $\mu_0 = (\dot\cup_{i=0}^k I_i) = \sum_{i=0}^k \ell(I_i)$ onde $\ell(I_i) = F(b_i) - F(a_i)$ se $I_i = (a_i, b_i]$)
- μ^* medida exterior induzida por μ_0, i.e.

$$\forall E \subset X,\ \mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) : (A_n) \prec \mathcal{A} \text{ com } E \subset \cup_n A_n \right\}$$

- $\mathcal{M}_F = \sigma(\mu^*)$

Proposição 1. Com a notação acima, tem-se

(i) $\forall E \subset X, \mu^*(E) = \inf\{\mu_F(\mathcal{U}) : E \subset \mathcal{U} \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}\}$.

(ii) $\forall E \in \mathcal{M}_F$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathcal{U} \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{U} \supset E$ e $\mu(\mathcal{U}|E) < \varepsilon$.

(iii) $\forall E \in \mathcal{M}_F$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists G \subset E$ fechado tal que $\mu_F(E|G) < \varepsilon$.

(iv) $\forall E \in \mathcal{M}_F$, $\mu_F(E) = \sup\{\mu_F(K) : K \subset\subset \mathbb{R} \text{ e } K \subset E\}$.

Proposição 2. Com a notação acima, seja $A \subset \mathbb{R}$. São equivalentes:

(i) $A \in \mathcal{M}_F$.

(ii) $\exists \mathcal{U} \in G_\delta | \mathcal{U} \supset A$ e $\mu^*(\mathcal{U} \backslash A) = 0$.

(iii) $\exists F \in F_\delta | F \subset A$ e $\mu^*(A \backslash F) = 0$.

Proposição 3. Com a notação acima, seja $A \in \mathcal{M}_F$ com $\mu_F(A) < \infty$. Então, $\forall \varepsilon > 0$ existe $J \subset \mathbb{R} | J$ é união finita disjunta de intervalos abertos de medida μ_F finita e $\mu_F(A \Delta J) < \varepsilon$.

`I.2) Propriedades da medida de Lebesgue.` Se $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{L} \doteq \mathcal{M}_F$ é a σ-álgebra de Lebesgue e $m \doteq \mu_F : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ é a medida de Lebesgue. Conforme visto acima, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ é o completamento de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$. Além disso, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathbb{P}(\mathbb{R})$

Proposição 4. Com a notação acima, considere, $\forall r \in \mathbb{R}$, $\tau_r, \mu_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por, respectivamente, $x \mapsto x + r$ e $x \mapsto rx$. Tem-se:

(i) $\forall A \in \mathcal{L} : A + r \doteq \tau_r(A) \in \mathcal{L}$ e $m(A + r) = m(A)$

(ii) $\forall A \in \mathcal{L}, rA \doteq \mu_r(A) \in \mathcal{L}$ e $m(rA) = |r| m(A)$

<u>Prova</u>:

(i) Se $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, A + r = \tau_r(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (pois $(\tau_r)^{-1} = \tau_{-r}$ é contínua e $A + r = (\tau_{-r})^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$). Além disso, $m(A + r) = m(A)$, com efeito:

  – Tome

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} &\to [0, \infty] \\ D &\mapsto m(D + r) \end{aligned}$$

  então ν é uma medida (pois $\nu(\emptyset) = 0$ e se $(A_n)_n \prec \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

$$\nu\left(\dot\bigcup_n A_n\right) = m\left(\left(\dot\bigcup_n A_n\right) + r\right) = m\left(\dot\bigcup_n (A_n + r)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n + r) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n))$$

  e ν coincide com m em $(a, b]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$

– Pela unicidade anteriormente vista, conclui-se que $\nu = m|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$. em particular, se $N \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ e $m(N) = 0$, $m(N+r) = 0$. Ora, seja $A \in \mathcal{L}$. Existem $\tilde{A} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ e $\tilde{N} \subset \mathbb{R} | \exists N \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ com $\tilde{N} \subset N$, $m(N) = 0$ e $A = \tilde{A} \cup \tilde{N}$ (pois $\mathcal{L}$ é o completamento de $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ com respeito a m). Então:

$$\tau_r(A) = \underbrace{\tau_r(\tilde{A})}_{\in \mathcal{B}_\mathbb{R}} \cup \underbrace{\tau_r(\tilde{N})}_{\subset \tau_r(N)} \text{ e } m(\tau_r(N)) = m(N) = 0$$

$$\therefore\ \tau_r(A) \in \mathcal{L} \text{ e } m(\tau_r(A)) = m(\tau_r(\tilde{A})) = m(\tilde{A}) = m(A)$$

(ii) Se $r = 0$, a afirmação é trivial. Suponha $r \neq 0$, então $\mu_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é homeomorfismo com inversa, $\mu_{1/r}$ e, pelo mesmo argumento de (i), conclui-se que se $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, $rA = \mu_r(A) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ e, tomando

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{B}_\mathbb{R} &\to [0, \infty] \\ D &\mapsto \frac{1}{|r|} m(rD) \end{aligned}$$

então ν é uma medida e, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$,

$$\nu((a,b]) = \underbrace{\frac{1}{|r|} m(r(a,b])}_{= \begin{cases} \dfrac{br - ar}{r} = b - a \text{ se } r > 0 \\ \dfrac{ar - br}{-r} = b - a \text{ se } r < 0 \end{cases}} = m((a,b])$$

$$\therefore\ \nu = m|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$$

Assim, $\forall A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$,

$$m(A) = \frac{1}{|r|} m(rA) \Leftrightarrow |r| m(A) = m(rA)$$

O resto é idêntico a (i)

II) Aplicações Mensuráveis (continuação).

Proposição 5. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis $(X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Então $g_1 \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n, g_2 \doteq \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n, g_3 \doteq \overline{\lim}\, u_n$ e $g_4 \doteq \underline{\lim}\, u_n$ são mensuráveis.

- Observação:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n : X &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \sup\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\} \\ \overline{\lim} u_n : X &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \overline{\lim}\, u_n(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} u_n(x) \end{aligned}$$

- Prova:

(i) $\forall a \in \mathbb{R}$

$$g_1^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_n^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$$

Isso mostra que g_1 é mensurável.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$

$$g_2^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_n^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$$

$\therefore g_2$ é mensurável.

(iii) Para g_3, aplica-se (i) e (ii) em cascata, para g_4, aplica-se (ii) e (i) em cascata.

Corolário 1. Se $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são mensuráveis.

Corolário 2. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis $(X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ pontualmente convergente para $f : X \to \mathbb{C}$. Então f é mensurável.

- Prova: $\text{Re}f = \lim_{n\to\infty} \text{Re}f_n$ é mensurável $X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\therefore$ é mensurável $X \to \mathbb{R}$. Analogamente, $\text{Im}f$ é mensurável, donde f é mensurável.

Definição 1 (partes positiva e negativa de uma função). Sejam $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

$$f^+ \doteq \max\{f, 0\}$$
$$f^- \doteq \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\}$$

Note que $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, e que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável ***see*** f^+ e f^- o forem.

- Observação: Uma decomposição similar para $f : X \to \mathbb{C}$ é a *decomposição polar*, i.e. $f = (\text{sgn}f) \cdot |f|$, onde $\text{sgn} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é a função mensurável dada por

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Note que f é mensurável ***see*** $\text{sgn}\, f$ e $|f|$ o forem.

`II.1) Funções Simples.`

Definição 2. Sejam X um conjunto e $A \subset X$

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

chama-se *indicatriz* ou *função característica* de A.

- Exercício: Se $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $A \subset X$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \chi_A$ mensurável.