

I) Construção de Medidas (continuação)

DEFINIÇÃO 1. Seja $\mu^* : \mathbb{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ medida exterior. Digo que $A \subset X$ é μ^* -mensurável se for cumprida a condição de Carathéodory:

$$\forall E \subset X, \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (\text{CA})$$

OBSERVAÇÃO. Em vista da subaditividade enumerável de μ^* , (CA) é equivalente a: $\forall E \subset X : \mu^*(E) < \infty, \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

TEOREMA 1 (teorema de Carathéodory). Sejam X um conjunto, $\mu^* : \mathbb{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ medida exterior. Então:

- (i) $\sigma(\mu^*) \doteq \{E \subset X | E \text{ } \mu^*\text{-mensurável}\}$ é uma σ -álgebra e $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ é uma medida.
- (ii) $\forall E \subset X | \mu^*(E) = 0$, tem-se $E \in \sigma(\mu^*)$. Em particular, $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ é completa.

DEFINIÇÃO 2. $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ chama-se *medida induzida* por μ^* .

TEOREMA 2 (teorema de extensão de Carathéodory). Seja $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ medida numa álgebra $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ e $\mu^* : \mathbb{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ induzida por μ_0 . Então:

- (a) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$
- (b) $\mathcal{A} \subset \sigma(\mu^*)$
- (c) $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mu^*)$ e $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ é uma medida que estende μ_0 . Além disso, se $\nu : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty]$ for outra medida que estende μ_0 , $\nu \leq \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$, i.e., $\forall E \in \sigma(\mathcal{A}), \nu(E) \leq \mu^*(E)$. Vale a igualdade se $\mu^*(E) < \infty$. Finalmente, se $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ for σ -finita (i.e. $\exists (A_n)_n \prec \mathcal{A}$ tal que $\cup_n A_n = X$ e $(\forall n) \mu_0(A_n) < \infty$), então $\nu = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ (em outras palavras, a extensão $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ é única).

- Pergunta: Com a notação acima, qual a relação entre $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})})$ (1) e $(X, \sigma(\mu^*), \mu^*|_{\sigma(\mu^*)})$ (2)?
- Resposta:
 - Se $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ for σ -finita, (2) é o completamento de (1).
 - No caso geral, (2) é o *saturamento* (vide definição no exercício 16 da lista 3) do completamento de (1).

II) Medidas de Radon em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 3. Dado (X, τ) espaço topológico, uma *medida boreliana* em X é uma medida $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow [0, \infty]$.

- Queremos: Caracterizar as medidas borelianas em $\mathbb{R}$ finitas nos compactos de $\mathbb{R}$. Estas coincidem com as medidas de Radon em $\mathbb{R}$.
- Ideia: Seja $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ medida finita. Tome

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mu((-\infty, x]) \end{aligned}$$

- F é crescente e contínua à direita. Isso decorre da monotonicidade e da continuidade para baixo da medida.
- Partiremos de $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita e tentaremos obter uma medida boreliana a partir de F .

DEFINIÇÃO 4. Seja $H \doteq \{(a, b] \cap \mathbb{R} | a, b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ e } a \leq b\}$. Os elementos de H chamam-se *h-intervalos*.

- Note que, se $a = b$, o intervalo é o conjunto vazio, logo $\emptyset \in H$. Além disso, H é uma semi-álgebra (em particular, é uma família elementar). Portanto, a álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H)$ gerada por H é dada por

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=0}^n J_i : n \in \mathbb{N}, (J_i)_{0 \leq i \leq n} \prec H \right\}$$

- Tome $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita. Definimos $F(+\infty) \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ e $F(-\infty) \doteq \lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Pomos:

$$\begin{aligned} \ell &: H \rightarrow [0, \infty] \\ (a, b] \cap \mathbb{R} &\mapsto F(b) - F(a) \end{aligned}$$

- Note que ℓ está bem definida, i.e. não ocorre $\infty - \infty$. Além disso, se F for a identidade, ℓ é igual a $b - a$, i.e. o comprimento do intervalo. Quero estender a ℓ a uma medida em $\mathcal{A}$, a qual será subsequentemente estendida a uma medida em $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ através do teorema de extensão de Carathéodory. Defina:

$$\begin{aligned} \mu_0 &: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty] \\ \dot{\bigcup}_{i=0}^n J_i &\mapsto \sum_{i=0}^n \ell(J_i) \end{aligned}$$

- Afirmção: μ_0 está bem definida e é finitamente aditiva.

– Bem definida significa:

$$\dot{\bigcup}_{i=0}^n J_i = \dot{\bigcup}_{k=0}^m I_k \Rightarrow \sum_{i=0}^n \ell(J_i) = \sum_{k=0}^m \ell(I_k)$$

LEMA 1. Se $J = (a, b] \cap \mathbb{R}$ h-intervalo e $\{J_i = (a_i, b_i] \cap \mathbb{R}\}_{0 \leq i \leq n} \prec H$ forem tais que $J = \dot{\bigcup}_{i=0}^n J_i$, então

$$\underbrace{\ell(J)}_{=F(b)-F(a)} = \sum_{i=0}^n \underbrace{\ell(J_i)}_{=F(b_i)-F(a_i)}$$

- Prova: Existem $i_0, i_1, \dots, i_n$ tais que

$$a = a_{i_0} < b_{i_0} = a_{i_1} < b_{i_1} = a_{i_2} < \dots < b_{i_n} = b$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \ell(J_i) &= \sum_{i=0}^n [F(b_i) - F(a_i)] = \sum_{j=0}^n [F(b_{i_j}) - F(a_{i_j})] = \\ &= F(b_{i_0}) - F(a_{i_0}) + F(b_{i_1}) - F(a_{i_1}) + \dots + F(b_{i_n}) - F(a_{i_n}) = \\ &= F(\underbrace{b_{i_n}}_{=b}) - F(\underbrace{a_{i_0}}_{=a}) = \ell((a, b]) = \ell(J) \end{aligned}$$

- Prova da afirmação:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \underbrace{\ell(J_i)}_{=\sum_{k=0}^m \ell(J_i \cap I_k)(*)} &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \ell(J_i \cap I_k) = \sum_{k=0}^m \underbrace{\sum_{i=0}^n \ell(J_i \cap I_k)}_{=\ell(I_k) \text{ pelo lema}} = \sum_{k=0}^m \ell(I_k) \\ (*) \text{ pelo lema e } \forall i \in \{0, \dots, n\}, J_i &= \dot{\bigcup}_{k=0}^m J_i \cap I_k \end{aligned}$$

– Para verificar μ_0 finitamente aditiva: tome $(J_k)_{0 \leq k \leq n} \prec \mathcal{A}$. Para cada k ,

$$J_k = \dot{\bigcup}_{i=0}^{n_k} \underbrace{I_i^k}_{\in H}$$

Então

$$\begin{aligned} \dot{\bigcup}_{k=0}^m J_k &= \dot{\bigcup}_{k=0}^m \dot{\bigcup}_{i=0}^{n_k} I_i^k \\ \therefore \mu_0 \left(\dot{\bigcup}_{k=0}^m J_k \right) &= \sum_{k=0}^m \underbrace{\sum_{i=0}^{n_k} \mu_0(I_i^k)}_{\mu_0(J_k)} \end{aligned}$$

- Agora verifiquemos que μ_0 é σ -aditiva:

LEMA 2. Sejam $J \in H$ e $(J_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec H \mid \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n = J$. Então $\mu_0(J) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n)$.

Demonstração. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n) \leq \mu_0(J)$. Com efeito, basta observar que a aditividade finita de μ_0 implica monotonicidade, daí, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^k \mu_0(J_n) = \mu_0(\cup_{n=0}^k J_n) \leq \mu_0(J)$, donde a desigualdade afirmada (fazendo $k \rightarrow \infty$).

2. $\mu_0(J) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n)$

Caso 1: $J = (a, b]$ com $a < b$ reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $J_n = (a_n, b_n]$ com $a_n < b_n$ reais. Dado $\varepsilon > 0$:

- Escolha $\delta > 0 \mid F(a + \delta) - F(a) < \varepsilon$ (existe, pela continuidade à direita da F)
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $\delta_n > 0$ tal que

$$F(b_n + \delta_n) - F(b_n) < 2^{-(n+1)}\varepsilon$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(b_n + \delta_n) - F(b_n) \leq \varepsilon$$

e portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[F(b_n + \delta_n) - F(a_n)]}_{= [F(b_n + \delta_n) - F(b_n)] + [F(b_n) - F(a_n)]} \leq \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)] + \varepsilon$$

Da cobertura aberta $\{(a_n, b_n + \delta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ do compacto $[a + \delta, b]$ podemos extrair uma subcobertura finita, digamos, $\{(a_n, b_n + \delta_n)\}_{n \in \Lambda}$ onde $\Lambda \subset \mathbb{N}$ finito. Podemos, reduzindo Λ se necessário, assumir que, se $n \neq m$ em Λ , $(a_n, b_n + \delta_n) \not\subseteq (a_m, b_m + \delta_m)$ e que $\forall n \in \Lambda$, $(a_n, b_n + \delta) \cap [a + \delta, b] \neq \emptyset$. Além disso, podemos escolher uma enumeração $(n_1, \dots, n_k)$ de Λ , $k = \#\Lambda$, de modo que $\Lambda = \{n_j, 1 \leq j \leq k\}$ e $\forall j \in \{1, \dots, k-1\}$, $a_{n_{j+1}} \in (a_{n_j}, b_{n_j} + \delta_{n_j})$. Assim, temos:

$$F(b) - F(a) = [F(b) - F(a + \delta)] + \underbrace{[F(a + \delta) - F(a)]}_{< \varepsilon} \leq F(b) - F(a + \delta) + \varepsilon \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \underbrace{F(b_{n_k} + \delta_{n_k}) - F(a_{n_1})}_{\substack{\uparrow \\ F \text{ crescente}}} + \varepsilon \leq \\ & = F(b_{n_k} + \delta_{n_k}) - F(a_{n_k}) + \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{[F(a_{n_{j+1}}) - F(a_{n_j})]}_{\substack{\leq \\ \uparrow \\ F \text{ crescente}}} \leq F(b_{n_j} + \delta_{n_j}) - F(a_{n_j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{j=1}^k [F(b_{n_j} + \delta_{n_j}) - F(a_{n_j})] + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)] + 2\varepsilon \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n + \delta_n) - F(a_n)] \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue-se $F(b) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)]$. Como já provamos a outra desigualdade, segue “=”.

Caso 2: $J = (-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$. Seja $(J_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec H \mid J = \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Já sabemos $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n) \leq \mu_0(J)$. Por outro lado, tome $M \in \mathbb{R} < b$. Tem-se

$$(M, b] = \cup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(M, b] \cap J_n}_{\in H}$$

Pelo caso 1, segue

$$F(b) - F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu_0(J_n \cap (M, b])}_{\substack{\subset J_n \\ \leq \mu_0(J_n)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n)$$

Tomando $\lim_{M \rightarrow -\infty}$, conclui-se que

$$\underbrace{F(b) - F(-\infty)}_{=\mu_0(J)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n)$$

Caso 3: $J = (a, +\infty] \cap \mathbb{R}$ é análogo ao caso 2, tomando $M \in \mathbb{R} > a$ e olhando para $(a, M]$

Caso 4: $J = \mathbb{R} = (-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}$. Tome $a \in \mathbb{R}$, de modo que $J = (-\infty, a] \dot{\cup} (a, +\infty)$, e aplique os casos 2 e 3 para cada um desses subintervalos. Fim da prova do lema. $\square$

Prova da σ -aditividade de μ_0 . Sejam $A \in \mathcal{A}(H)$ e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}(H)$ tais que $A = \dot{\cup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$. $\vdash \mu_0(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$. Tome $(I_i)_{0 \leq i \leq k} \prec \cdot H | A = \dot{\cup}_{i=0}^k I_i$. Como cada A_n é reunião finita disjunta de h-intervalos, podemos tomar $(J_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec H$ enumeração dos h-intervalos que aparecem na decomposição dos A_n 's em reunião finita disjunta de h-intervalos (para cada n fixo escolhemos e fixamos tal decomposição). A aditividade finita de μ_0 implica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \mu_0(A) &= \sum_{i=0}^k \mu_0(I_i) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \sum_{i=0}^k \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(I_i \cap J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^k \mu_0(I_i \cap J_n) \underset{\substack{\uparrow \\ (**)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n) \\ (*) \text{ por } &\begin{cases} I_i = \dot{\cup}_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{I_i \cap J_n}_{\in H} \\ + \text{ lema 2} \end{cases} \\ (**) \text{ por } &\begin{cases} J_n = \dot{\cup}_{i=0}^k \underbrace{J_n \cap I_i}_{\in H} \\ + \mu_0 \text{ finitamente aditiva} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusão:

$$\mu_0(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

$\square$

Com isso, fica demonstrada a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1. Com a notação acima, μ_0 está bem definida e é uma medida na álgebra $\mathcal{A}$.

Pela proposição, $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida na álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H)$ gerada por H . Pelo teorema de extensão de Carathéodory, existe, pois uma medida $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ que estende μ_0 . Isso prova parte do seguinte:

TEOREMA 3 (caracterização das medidas de Radon em $\mathbb{R}$). Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita. Então:

- (i) existe uma única medida boreliana μ_F tal que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$. Além disso,
 - a) μ_F é finita nos compactos
 - b) Se $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita $\mu_F = \mu_G$ *see* $F - G$ constante.
- (ii) Reciprocamente, se $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ medida finita nas compactos, existe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita tal que $\mu = \mu_F$.

• Prova:

- (i) Já provamos a existência. Provaremos a unicidade: Seja $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ medida tal que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$ (*). $\vdash \mu = \mu_F$ (sendo a μ_F construída pela proposição anterior mais o teorema de extensão Carathéodory). Ora, para todo $J \in H$, $\mu_F(J) = \mu(J)$, pois:

* Se J limitado, i.e. $J = (a, b]$ com $a < b$ reais, isso é claro, por (*).

* Se J não limitado, podemos escrever $J = \dot{\cup}_{n \in \mathbb{N}} J_n$ com $(\forall n) J_n \in H$ e J_n limitado

$$\begin{array}{ccccccc} \therefore \mu(J) & & \overset{\infty}{\sum_{n=1}} \mu(J_n) & & \overset{\infty}{\sum_{n=1}} \mu_F(J_n) & & \mu_F(J) \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \mu \text{ medida} & & \text{por } (*) & & \mu_F \text{ medida} & \end{array}$$

Então, se $A \in \mathcal{A}(H)$, pondo $a = \dot{\cup}_{i=0}^k J_i$

$$\mu_F(A) = \sum_{i=0}^k \underbrace{\mu_F(J_i)}_{\mu(J_i)} = \mu(A)$$

Conclusão: $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_F|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. Como μ_0 é σ -finita (pois $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1]$ e $\mu_0((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty$), a unicidade no teorema de extensão de Carathéodory garante $\mu = \mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$. Está provada, pois, a unicidade. Além disso:

- É claro que μ_F é finita nos compactos: se $K \subseteq \mathbb{R}$, $\exists a, b \in \mathbb{R} | K \subset (a, b] \therefore \mu_F(K) \leq \mu_F((a, b]) < \infty$
- Se $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua a direita:
 1. Se $\mu_F = \mu_G$, $\forall a, b \in \mathbb{R} | a < b$,

$$F(b) - F(a) = \mu_F((a, b]) = \mu_G((a, b]) = G(b) - G(a)$$

$\therefore F - G$ é constante

2. Se $F - G$ constante, então μ_F e μ_G coincidem em todo $J \in H$ com J limitado $\therefore \mu_F = \mu_G$

(ii) Tome $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F \doteq \begin{cases} \mu((0, x]) & \text{se } x > 0 \\ -\mu((x, 0]) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Então, F está bem definida (pela finitude de μ dos compactos), F é crescente (pela monotonicidade de μ) e F é contínua a direita (pela continuidade para baixo de μ , por exemplo, se $x > 0$ e $x_n \searrow x$, $F(x_n) = \mu((0, x_n]) \rightarrow \mu((0, x]) = F(x)$). Como μ e μ_F coincidem nos h -intervalos limitados, segue-se (de (i)) $\mu = \mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$.

- Observação 1: A mesma construção feita anteriormente pode ser reproduzida para h -intervalos da forma $[a, b) \cap \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à esquerda.
- Observação 2: Dada $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita, seja $\mu_0 : \mathcal{A}(H) \rightarrow [0, \infty]$ medida induzida por $\overline{F}$ conforme foi feito anteriormente. O teorema de extensão de Carathéodory fornece mais que uma medida boreliana $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$, fornece uma medida $\mu_F : \mathcal{M}_F \doteq \sigma(\mu^*) \rightarrow [0, \infty]$ a qual é o complemento de $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ (pois $\mu_0 : \mathcal{A}(H) \rightarrow [0, \infty]$ é σ -finita).

DEFINIÇÃO 5. Com a notação acima, $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ ou $\mu_F : \mathcal{M}_F \rightarrow [0, \infty]$ chama-se *medida de Lebesgue-Stieltjes* induzida por F . Se $F = \text{id}_{\mathbb{R}}$, μ_F chama-se *medida de Lebesgue*, e denota-se por m . $\mathcal{L} \doteq \mathcal{M}_F$ chama-se σ -álgebra de Lebesgue.

- Observação: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathbb{P}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{L}$ é o complemento de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ com respeito a medida de Lebesgue.