MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

`http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798`
`Notas das Aulas de 29/7 e 3/8`

I) Medidas de Radon. Fixemos, até o final desta seção, um espaço localmente compacto Hausdorff ("LCH", daqui em diante) (X, τ_X).

Definição 1 (medidas de Radon). Uma medida positiva μ em $(X, \mathcal{B}_X)$ diz-se *de Radon* se:

i) para todo $K \subset X$ compacto, $\mu(K) < \infty$.

ii) μ é *exteriormente regular* em todos os borelianos: $\forall E \in \mathcal{B}_X$, $\mu(E) = \inf\{\mu(\mathcal{U}) : E \subset \mathcal{U} \text{ e } \mathcal{U} \in \tau_X\}$.

iii) μ é *interiormente regular* nos abertos: $\forall \mathcal{U} \in \tau_X$, $\mu(\mathcal{U}) = \sup\{\mu(K) : K \Subset \mathcal{U}\}$.

I.1) Teorema de Representação de Riesz para Funcionais Lineares Positivos.

Definição 2 (funcionais lineares positivos em $\mathsf{C_c}(X)$). Denotamos por $\mathsf{C_c}(X)$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ contínua e } \operatorname{supp} f \Subset X\}$. Um funcional linear $I : \mathsf{C_c}(X) \to \mathbb{C}$ diz-se *positivo* se $I(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$.

Notação: Dado $\mathcal{U} \in \tau_X$, a notação "$f \prec \mathcal{U}$" significa: $f \in \mathsf{C_c}(X)$, $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \Subset \mathcal{U}$.

Teorema 1. Seja $I : \mathsf{C_c}(X) \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo. Então existe uma única medida de Radon μ em $(X, \mathcal{B}_X)$ que o representa, i.e. tal que, $\forall f \in \mathsf{C_c}(X)$:

$$I(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu$$

Além disso, a medida μ em abertos ou compactos de X se calcula pelas fórmulas abaixo:

i) $\forall \mathcal{U} \in \tau_X$, $\mu(\mathcal{U}) = \sup\{I(f) : f \prec \mathcal{U}\}$.

ii) $\forall K \Subset X$, $\mu(K) = \inf\{I(f) : \chi_K \leq f\}$.

Exemplo 1: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dada $f \in \mathsf{C_c}(\mathsf{M})$, define-se $I(f) \doteq \int f|\omega|$ a integral de f com respeito à densidade induzida pelo elemento de volume de (M, g) usando-se integrais de Riemann, como no Cálculo em Variedades. Isso define um funcional linear positivo em $\mathsf{C_c}(\mathsf{M})$. Pelo teorema de representação de Riesz, tal funcional se representa por uma única medida de Radon em $(\mathsf{M}, \mathcal{B}_\mathsf{M})$, chamada *medida de Lebesgue* de (M, g). No caso particular em que M é a esfera $\mathsf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a medida de Lebesgue em S^n coincide com a medida em $(\mathsf{S}^n, \mathcal{B}_{\mathsf{S}^n})$ definida quando da discussão da integração em coordenadas polares.

Observação: A positividade de um funcional linear $I : \mathsf{C_c}(X) \to \mathbb{C}$ garante a continuidade de I com respeito a uma certa topologia *LF* em $\mathsf{C_c}(X)$, i.e. a topologia limite indutiva dos subespaços $\mathsf{C_c}(K) \doteq \{f \in \mathsf{C_c}(X) : \operatorname{supp} f \Subset K\}$, onde K percorre o conjunto das partes compactas de X, munidos das respectivas topologias C^0 (i.e. topologia da convergência uniforme em K). Ou seja, todo funcional linear positivo em $\mathsf{C_c}(X)$ é, automaticamente, um elemento do dual de $\mathsf{C_c}(X)$ munido da referida topologia LF. A esse respeito, uma outra versão do teorema de representação de Riesz pode ser usada para descrever o referido dual de $\mathsf{C_c}(X)$: vide, por exemplo, a referência [1].

I.2) Propriedades de Regularidade das Medidas de Radon.

Proposição 1. Sejam X espaço LCH e μ uma medida de Radon em $(X, \mathcal{B}_X)$. Então μ é internamente regular em todo $E \in \mathcal{B}_X$ σ-finito com respeito a μ, i.e. $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \Subset E\}$.

Corolário 1. Com a notação da proposição anterior, se μ for σ-finita (por exemplo, se X for σ-compacto), então μ é regular, i.e. interna e exteriormente regular em todos os borelianos de X.

Proposição 2. Seja μ uma medida de Radon σ-finita em $(X, \mathcal{B}_X)$. Então, para todo $E \in \mathcal{B}_X$:

i) $\forall \epsilon > 0$, existem $\mathcal{U} \supset E$ aberto e $F \subset E$ fechado tais que $\mu(\mathcal{U} \setminus F) < \epsilon$.

ii) existem $A \in F_\sigma$ e $B \in G_\delta$ tais que $A \subset E \subset B$ e $\mu(B \setminus A) = 0$.

Teorema 2. Seja X espaço LCH no qual todo aberto é σ-compacto (por exemplo, se X tiver base enumerável de abertos). Então toda medida positiva μ em $(X, \mathcal{B}_X)$ finita nos compactos de X é uma medida de Radon.

Corolário 2. Toda medida boreliana em $\mathbb{R}^n$ finita nos compactos é de Radon. Em particular, toda medida de Lebesgue-Stieltjes em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ é de Radon.

Proposição 3. Sejam X espaço LCH e μ uma medida de Radon em $(X, \mathcal{B}_X)$. Então, para $1 \leq p < \infty$, $\mathsf{C_c}(X)$ é denso em $\mathsf{L^p}(\mu)$.

Teorema 3 (Lusin). Sejam X espaço LCH, μ uma medida de Radon em $(X, \mathcal{B}_X)$ e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função boreliana que se anule no complementar de um boreliano E de medida finita. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\phi \in \mathsf{C_c}(X)$ que coincide com f no complementar de um mensurável de medida menor que ϵ. Além disso, se f for limitada, é possível tomar ϕ de modo que $\|\phi\|_u \leq \|f\|_u$.

Referências

[1] L. Evans and R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, Taylor & Francis, 1991.