

I) O Dual de L^p . Fixaremos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjugados e $g \in L^p$. Então, pela desigualdade de Hölder, fica bem definido um funcional linear contínuo $\phi_g : L^q \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $f \mapsto \int fg \, d\mu$, tal que $\|\phi_g\| \leq \|g\|_p$. A proposição abaixo afirma que, em quase todas as situações, $\|\phi_g\| = \|g\|_p$, de modo que $g \mapsto \phi_g$ define uma isometria linear $\phi : L^p \rightarrow L^{q*}$.

PROPOSIÇÃO 1. Com a notação acima, se $1 \leq p < \infty$, ou se $p = \infty$ e μ semifinita, $\phi : L^p \rightarrow L^{q*}$ é uma isometria linear.

Demonstração. Só precisamos verificar que, $\forall g \in L^p$, $\|\phi_g\| \geq \|g\|_p$, pois a outra desigualdade segue por Hölder e a linearidade é clara. Se $\|g\|_p = 0$, não há o que fazer; suponha, pois, $\|g\|_p > 0$.

1. Se $1 < p < \infty$, tome $f \doteq \overline{\text{sgn } g} \cdot \frac{|g|^{p-1}}{\|g\|_p^{p-1}}$. Então $\|f\|_q = 1$ e $\phi_g(f) = \int fg \, d\mu = \|g\|_p$, de modo que $\|\phi_g\| \geq \|g\|_p$, como afirmado.
2. Se $p = 1$ e $q = \infty$, tome $f \doteq \overline{\text{sgn } g}$. Então $\|f\|_\infty = 1$ (pois $g > 0$ num conjunto de medida > 0) e $\phi_g(f) = \int fg \, d\mu = \|g\|_1$, donde $\|\phi_g\| \geq \|g\|_1$, como afirmado.
3. Se $p = \infty$ e μ semifinita. Nesse caso, $q = 1$ e, dado $\epsilon > 0$, como $\|g\|_\infty$ é o supremo essencial de g , podemos tomar $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) > 0$ tal que $|g| > \|g\|_\infty - \epsilon$ em E . E, pela semifinitude de μ , podemos supor $\mu(E) < \infty$. Tome $f \doteq \overline{\text{sgn } g} \cdot \frac{\chi_E}{\mu(E)}$. Então $\|f\|_1 = 1$ (pois $|\text{sgn } g| = 1$ em E para $\|g\|_\infty - \epsilon > 0$) e $\phi_g(f) = \int fg \, d\mu \geq \|g\|_\infty - \epsilon$. Pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$ tomado, isso implica $\|\phi_g\| \geq \|g\|_\infty$, como afirmado.

□

Reciprocamente, em quase todas as situações, se g é uma função mensurável tal que $f \mapsto \int fg \, d\mu$ define um funcional linear contínuo em L^q , então $g \in L^p$.

TEOREMA 1 (recíproca da desigualdade de Hölder). Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjugados e g uma função mensurável tal que fg seja integrável para toda função $f \in L^q(\mu)$ e tal que:

$$M_p(g) \doteq \sup\{|\int fg| : f \in L^q(\mu), \|f\|_q \leq 1\} < \infty \quad (1)$$

Suponha também que $S_g \doteq \{g \neq 0\}$ seja σ -finito ou que μ seja semifinita. Então $g \in L^p$ e $\|g\|_p = M_p(g)$.

Provaremos o enunciado abaixo, que claramente implica o anterior.

TEOREMA 2 (recíproca da desigualdade de Hölder, v.2). Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjugados e g uma função mensurável tal que fg seja integrável para toda função $f \in \Sigma \doteq \{\text{funções simples integráveis}\}$ e tal que:

$$M_p(g) \doteq \sup\{|\int fg| : f \in \Sigma, \|f\|_q \leq 1\} < \infty \quad (2)$$

Suponha também que $S_g \doteq \{g \neq 0\}$ seja σ -finito ou que μ seja semifinita. Então $g \in L^p$ e $\|g\|_p = M_p(g)$.

Demonstração. 1) Notemos, inicialmente, que, se f for uma função mensurável e limitada que se anule no complementar de um mensurável E de medida finita e $\|f\|_q \leq 1$, então $|\int fg \, d\mu| \leq M_p(g)$. Com efeito, existe uma sequência de funções simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \xrightarrow{p} f$ e $(\forall n) |f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f| \leq \|f\|_\infty \chi_E$. Como f é integrável, $(f_n)_n$ é uma sequência em Σ e $(\forall n) \|f_n\|_q \leq \|f\|_q \leq 1$, logo $(\forall n) |\int f_n g \, d\mu| \leq M_p(g)$. Além disso, $f_n g \xrightarrow{p} fg$ e $(\forall n) |f_n g| \leq \|f\|_\infty \chi_E g \in L^1$, de modo que o TCD se aplica e conclui-se que $|\int f_n g \, d\mu| \rightarrow |\int fg \, d\mu|$.

2) Suponha $p < \infty$, de modo que $q > 1$. Podemos assumir S_g σ -finito, em vista do lema abaixo:

LEMA 1. Se $p < \infty$, $M_p(g) < \infty$ e μ semifinita, então S_g é σ -finito.

Prova do Lema: Dado $\epsilon > 0$, seja $S_\epsilon \doteq \{|g| > \epsilon\}$. Basta verificar que $\mu(S_\epsilon) < \infty$. Supondo $\mu(S_\epsilon) = \infty$, para todo $c > 0$ existe, pela semifinitude de μ , $E \in \mathcal{M}$ tal que $E \subset S_\epsilon$ e $c < \mu(E) < \infty$. Portanto, se $q < \infty$, $f \doteq \frac{\overline{\text{sgn } g}}{\|\chi_E\|_q} \chi_E$ é mensurável, limitada, se anula no complementar de E de medida finita e $\|f\|_q \leq 1$. Como $|\int fg \, d\mu| = \frac{1}{\|\chi_E\|_q} \int_E |g| \, d\mu > \epsilon \mu(E)^{1-1/q} > \epsilon c^{1/p}$, segue-se do item anterior que $M_p(g) \geq \epsilon c^{1/p}$. Fazendo $c \rightarrow \infty$, obtém-se $M_p(g) = \infty$, chegando-se a uma contradição. Por outro lado, se $q = \infty$, tome $f \doteq \overline{\text{sgn } g} \chi_E$, a qual é mensurável, limitada, se anula no complementar de E e $\|f\|_\infty \leq 1$. Então $|\int fg \, d\mu| = \int_E |g| > c\epsilon$, donde $M_p(g) \geq c\epsilon$, o que implica, como no caso anterior, $M_p(g) = \infty$. □

Podemos assumir $\mu(S_g) > 0$, caso contrário $g = 0$ μ -q.s. e a tese é trivial. Tome, pois, $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ sequência crescente de mensuráveis de medida finita e estritamente positiva tal que $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = S_g$. Tome, além disso, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções simples tal que $(\forall n)|\phi_n| \leq |\phi_{n+1}| \leq |g|$ e $\phi_n \xrightarrow{p} g$, e defina $(\forall n)g_n \doteq \chi_{E_n} \cdot \phi_n$. Então $(\forall n)|g_n| \leq |g|$, $g_n \xrightarrow{p} g$, $(\forall n)g_n$ é simples e se anula no complementar de E_n , logo $\|g_n\|_p < \infty$. Finalmente, defina:

$$f_n \doteq \frac{\overline{\text{sgn } g} |g_n|^{p-1}}{\|g_n\|_p^{p-1}}$$

Note que, como $\mu(S_g) > 0$, $\|g\|_p > 0$. E, como $g_n \xrightarrow{p} g$, segue-se do lema de Fatou que $0 < \|g\|_p \leq \liminf \|g_n\|_p$, de modo que podemos assumir, descartando-se os termos iniciais da sequência, se necessário, que $\|g_n\|_p > 0$, garantindo-se que f_n está bem definida. Além disso, $(\forall n \in \mathbb{N})f_n$ é mensurável, se anula no complementar do mensurável de medida finita E_n e é limitada (pois $|g_n|$ é limitada, por ser uma função simples). Além disso, $(\forall n)\|f_n\|_q \leq 1$, daí a conclusão do item anterior se aplica e justifica a última das desigualdades abaixo:

$$\begin{aligned} \|g\|_p &\leq \liminf \underbrace{\|g_n\|_p}_{= \int |f_n g_n| d\mu} = \liminf \int |f_n g_n| d\mu \leq \\ &\leq \liminf \int |f_n g| d\mu = \liminf \int f_n g d\mu \leq M_p(g) \end{aligned} \quad (3)$$

Então $\|g\|_p \leq M_p(g)$; e, por Hölder, $M_p(g) \leq \|g\|_p$. Logo, $\|g\|_q = M_p(g) < \infty$, como afirmado, concluindo-se o argumento para o caso $p < \infty$.

- 3) Caso $p = \infty$, $q = 1$. Dado $\epsilon > 0$, seja $A \doteq \{x \in X : |g(x)| \geq M_p(g) + \epsilon\}$. Mostremos que $\mu(A) = 0$, o que acarretará, pela arbitrariedade do ϵ tomado, $\|g\|_\infty \leq M_p(g)$. Com efeito, suponha $\mu(A) > 0$. Então, seja pela semifinitude de μ ou pelo fato de $A \subset S_g$, existe $E \subset A$ mensurável tal que $0 < \mu(E) < \infty$. Defina $f \doteq \frac{\overline{\text{sgn } g} \chi_E}{\mu(E)}$. Então f é mensurável, limitada, se anula no complementar do mensurável E de medida finita e $\|f\|_1 \leq 1$. Portanto, pela parte 1) do argumento, tem-se $M_p(g) \geq |\int f g d\mu| = \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g| d\mu \geq M_p(g) + \epsilon$, chegando-se a uma contradição.

Então $\|g\|_\infty \leq M_p(g)$, e a outra desigualdade segue por Hölder, logo $\|g\|_\infty = M_p(g) < \infty$, como afirmado. $\square$

Finalmente, provaremos a seguir que, se $p < \infty$, em quase todas as situações, a isometria linear $\phi : \mathbb{L}^p \rightarrow \mathbb{L}^{q*}$ definida acima é sobrejetiva, de modo a identificar $\mathbb{L}^{q*} \equiv \mathbb{L}^p$.

TEOREMA 3 (teorema de representação de Riez para o dual de $\mathbb{L}^p$). Sejam $p \in (1, \infty]$ e q o expoente conjugado de p (de modo que $q \in [1, \infty)$). Se $q > 1$, ou se $q = 1$ e μ σ -finita, $\phi : \mathbb{L}^p \rightarrow \mathbb{L}^{q*}$ é uma isometria linear sobrejetiva.

Demonstração. 1) Já sabemos que $\phi : \mathbb{L}^p \rightarrow \mathbb{L}^{q*}$ é uma isometria linear. Resta provar que é sobrejetiva.

- 2) Suponha μ finita. Nesse caso, $\forall E \in \mathcal{M}$, $\chi_E \in \mathbb{L}^q$.

Seja $\phi \in \mathbb{L}^{q*}$. Defina $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ por $E \mapsto \phi(\chi_E)$.

- i) ν é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. Com efeito, é claro que $\nu(\emptyset) = 0$ e que ν é finitamente aditiva, pela linearidade de ϕ ; verifiquemos que ν é σ -aditiva. De fato, se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, $E = \dot{\cup}_{n \in \mathbb{N}} E_n$, então:

$$\|\chi_E - \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}\|_q = \mu(\dot{\bigcup}_{k=n+1}^{\infty} E_k)^{1/q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pelo fato de ser $q < \infty$ e pela continuidade para baixo da medida aplicada à sequência decrescente $\{\dot{\bigcup}_{k=n+1}^{\infty} E_k\}_{n \in \mathbb{N}}$, cuja intersecção é vazia. Portanto, como ϕ é contínua em $\mathbb{L}^q$:

$$\nu(E) = \phi(\chi_E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\sum_{k=1}^n \chi_{E_k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \phi(\chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(\chi_{E_k})$$

e a série no segundo membro é comutativamente convergente (pois qualquer reordenação da sequência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ terá união E e o mesmo argumento se aplica a uma tal reordenação), logo absolutamente convergente, i.e. somável.

- ii) $\nu \ll \mu$. Com efeito, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) = 0$, então χ_E é nula quase sempre, i.e. nula como elemento de $\mathbb{L}^q(\mu)$. Portanto, $\nu(E) = \phi(\chi_E) = 0$.

- iii) Pelo teorema de Radon-Nikodym, existe, pois, $g \in L^1(\mu)$ tal que $\nu = g d\mu$. Note que, como μ é finita, toda função simples $X \rightarrow \mathbb{C}$ está em $L^\infty \cap L^1$. Como funcionais lineares no espaço $\Sigma \doteq \{\text{funções simples } X \rightarrow \mathbb{C}\}$, ϕ e $g d\mu$ coincidem num conjunto de geradores, a saber, nas funções características; então coincidem em Σ . Portanto, para toda $f \in \Sigma$, $fg \in L^1(\mu)$ e:

$$\left| \int fg d\mu \right| = |\phi(f)| \leq \|\phi\| \|f\|_q,$$

o que implica, pela recíproca da desigualdade de Hölder, $g \in L^p$ e $\|g\|_p \leq \|\phi\|$.

Finalmente, $\phi_g \in L^{q*}$ e $\phi \in L^{q*}$ coincidem no subespaço denso Σ de L^{q*} ; então $\phi_g = \phi$, o que conclui a prova da sobrejetividade no caso μ finita.

- 3) Suponha μ σ -finita. Tome $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $X = \dot{\cup}_{n \in \mathbb{N}} E_n$ e $(\forall n \in \mathbb{N}) \mu(E_n) < \infty$. Seja $\phi \in L^q(\mu)^*$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a medida finita $\mu_n \doteq \mu \upharpoonright E_n$ em $(X, \mathcal{M})$; a aplicação $f \mapsto f \cdot \chi_{E_n}$ define uma isometria linear $L^q(\mu_n) \rightarrow L^q(\mu)$ (pois, para toda $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável, $\int |f \chi_{E_n}|^p d\mu = \int |f|^p \chi_{E_n} d\mu = \int |f|^p d\mu_{E_n}$). A composta de ϕ com esta isometria define um funcional linear contínuo $\phi_n \in L^q(\mu_n)^*$, com $\|\phi_n\| \leq \|\phi\|$; pelo item anterior, existe $g_n \in L^p(\mu_n)$ que representa ϕ_n , i.e. $\phi_n : f \mapsto \int fg_n d\mu_n$. Podemos supor, modificando g_n num conjunto μ_n -nulo, se necessário, que g_n se anula no complementar de E_n . Assim sendo, $g_n \in L^p(\mu)$ e $\|g_n\|_{L^p(\mu)} = \|g_n\|_{L^p(\mu_n)} = \|\phi_n\| \leq \|\phi\|$.

Defina a função mensurável $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ por $G \doteq \sum_{n=1}^\infty g_n$. Verifiquemos que $G \in L^p(\mu)$ e G representa ϕ . De fato:

- i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $G_n \doteq \sum_{k=1}^n g_k \in L^p(\mu)$ e, $\forall f \in L^q(\mu)$, $|\int f G_n d\mu| = |\sum_{k=1}^n \int f g_k d\mu| = |\sum_{k=1}^n \phi_k(\chi_{E_k} \cdot f)| = |\sum_{k=1}^n \phi(\chi_{E_k} \cdot f)| = |\phi(\sum_{k=1}^n \chi_{E_k} \cdot f)| = |\phi(\chi_{\dot{\cup}_{k=1}^n E_k} \cdot f)| \leq \|\phi\| \|\chi_{\dot{\cup}_{k=1}^n E_k} \cdot f\|_q \leq \|\phi\| \|f\|_q$. Portanto, pela recíproca da desigualdade de Hölder, conclui-se que $G_n \in L^p(\mu)$ e $\|G_n\|_p \leq \|\phi\|$. Como $|G_n| \nearrow |G|$, segue-se (pelo lema de Fatou se $p < \infty$, pelo lema ao final da demonstração se $p = \infty$) que:

$$\|G\|_p \leq \liminf \|G_n\|_p \leq \|\phi\|$$

logo, $G \in L^p(\mu)$ e $\|G\|_p \leq \|\phi\|$.

- ii) Dada $F \in L^q(\mu)$, defina $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n \doteq F \cdot \chi_{E_n}$. Então $F_n \doteq \sum_{k=1}^n f_k \xrightarrow{L^q} F$, pois $|F - F_n|^q$ converge pontualmente para zero e $|F - F_n|^q \leq |F|^q \in L^1$, de modo que o teorema da convergência dominada se aplica. Portanto, $\phi(F_n) \rightarrow \phi(F)$. Por outro lado, $F_n G \xrightarrow{p} FG$ e $|F_n G| \leq |FG|$, sendo $FG \in L^1$, por Hölder. Daí, usando uma vez mais o teorema da convergência dominada:

$$\int FG d\mu = \lim \underbrace{\int F_n G d\mu}_{= \int F_n G_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int f_k g_k d\mu_n} = \lim \sum_{k=1}^n \phi(f_k) = \lim \phi(F_n) = \phi(F)$$

o que implica $\phi = \phi_G$.

- 4) Suponha μ medida positiva qualquer e $1 < q < \infty$, de modo que $1 < p < \infty$. Seja $\phi \in L^q(\mu)^*$. Para cada $F \in \mathcal{M}$ σ -finito, podemos considerar a medida σ -finita $\mu_F \doteq \mu \upharpoonright F$ e identificar $L^q(\mu_F)$ com um subespaço fechado de $L^q(\mu)$, dado pela imagem da isometria $f \in L^q(\mu_F) \mapsto f \cdot \chi_F \in L^q(\mu)$. A restrição de ϕ a este subespaço é um elemento de $L^q(\mu_F)^*$, o qual se representa, pelo item anterior, por uma função $g_F \in L^p(\mu_F) \subset L^p(\mu)$ com $\|g_F\|_p \leq \|\phi\|$. Note que, se $E \subset F$ mensuráveis e σ -finitos, então $\chi_E \cdot g_F$ também representa a restrição de ϕ a $L^q(\mu_E)$, de modo que g_F coincide com g_E μ -q.s. em E .

Defina $\Sigma \doteq \{F \in \mathcal{M} : F \text{ } \sigma\text{-finito}\}$ e $M \doteq \sup\{\|g_F\|_p : F \in \Sigma\} \leq \|\phi\|$. Afirmando que M é um máximo, i.e. existe $F \in \Sigma$ tal que $\|g_F\|_p = M$. Com efeito, basta tomar uma sequência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \Sigma$ tal que $\|g_{F_n}\|_p \rightarrow M$ e tomar $F \doteq \dot{\cup}_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Então $F \in \mathcal{M}$ é σ -finito, i.e. $F \in \Sigma$, e, como observado acima, $(\forall n \in \mathbb{N}) g_F$ coincide com g_{F_n} μ -q.s. em F_n , o que implica $(\forall n \in \mathbb{N}) \|g_{F_n}\|_p \leq \|g_F\|_p$, donde $M = \lim \|g_{F_n}\|_p \leq \|g_F\|_p \leq M$, portanto $\|g_F\|_p = M$, como afirmado. Afirmando que $g \doteq g_F \in L^p(\mu)$ representa ϕ . Com efeito:

- i) Se $A \in \mathcal{M}$ for σ -finito e $F \subset A$, então $g_A = g_F$ μ -q.s., pois:

$$M^p \geq \int |g_A|^p d\mu = \int_F |g_A|^p d\mu + \int_{A \setminus F} |g_A|^p d\mu = \int |g_F|^p d\mu + \int_{A \setminus F} |g_A|^p d\mu = M^p + \int_{A \setminus F} |g_A|^p d\mu$$

o que implica $\int_{A \setminus F} |g_A|^p d\mu = 0$, logo $g_A = 0$ quase sempre em $A \setminus F$, i.e. $g_A = g_F$ quase sempre, como afirmado.

- ii) Dada $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $\{f > 0\}$ é σ -finito; tome $A \doteq \{f > 0\} \cup F$, de modo que A é σ -finito, $A \supset F$ e $f = f \cdot \chi_A \in \mathcal{L}^q(\mu_A)$. Então, pelo item anterior, $g_A = g_F$ quase sempre, o que permite concluir que:

$$\phi(f) = \int f g_A d\mu = \int f g_F d\mu$$

i.e. $g = g_F \in \mathcal{L}^p(\mu)$ representa ϕ , como afirmado.

Note que a hipótese $p < \infty$ foi usada na última parte do argumento para garantir $g_A = g_F$ μ -q.s. se $A \supset F$ mensurável e σ -finito. □

LEMA 2 (Fatou para $\mathcal{L}^\infty$). Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{L}^+$ e $f \doteq \liminf f_n$. Então $\|f\|_\infty \leq \liminf \|f_n\|_\infty$.

Demonstração. Seja $c < \|f\|_\infty$. Então $\{f > c\}$ tem medida estritamente positiva, e $\{f > c\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \{f_k > c\}$. Portanto, pela subaditividade enumerável de μ , conclui-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{k \geq n_0} \{f_k > c\}$ tem medida estritamente positiva, donde $(\forall k \geq n_0) \|f_k\|_\infty > c$. Pela arbitrariedade do $c < \|f\|_\infty$ tomado, isso implica $\|f\|_\infty \leq \liminf \|f_n\|_\infty$. □

COROLÁRIO 1. Se $1 < p < \infty$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ é um espaço de Banach reflexivo.

I.1) Algumas desigualdades úteis.

PROPOSIÇÃO 2 (desigualdade de Chebyshev). Sejam $0 < p < \infty$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $\alpha > 0$. Então $\mu(\{|f| > \alpha\}) \leq \left[\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right]^p$.

TEOREMA 4 (desigualdade de Minkowski integral). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ -finitos e f uma função $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável em $X \times Y$.

- a) Se $f \in \mathcal{L}^+$ e $1 \leq p < \infty$,

$$\left[\int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{1/p} d\nu(y) \quad (4)$$

- b) Se $p \in [1, \infty]$, vale a desigualdade abaixo, desde que o segundo membro faça sentido e seja finito (i.e. se para ν -q.t. $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e a função mensurável definida quase sempre $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ for ν -integrável, então, para μ -q.t. $x \in X$ $f(x, \cdot)$ é ν -integrável, a função definida quase sempre $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ está em $\mathcal{L}^p$ e vale a desigualdade):

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y) \quad (5)$$

Demonstração. a) Se $p = 1$, vale a igualdade pelo teorema de Tonelli. Suponha $1 < p < \infty$ e que o segundo membro da desigualdade seja finito (caso contrário a tese é trivial); tome q o expoente conjugado de p . Para toda $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right) |g(x)| d\mu(x) &= \int \int f(x, y) |g(x)| d\nu(y) d\mu(x) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \\ &= \int \int f(x, y) |g(x)| d\mu(x) d\nu(y) \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\ &\leq \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{1/p} \|g\|_q d\nu(y) = \left(\int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{1/p} d\nu(y) \right) \|g\|_q \end{aligned}$$

Portanto, pela recíproca da desigualdade de Hölder, conclui-se que $\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y)$, como afirmado.

- b) Se $p = \infty$, a desigualdade é imediata a partir da monotonicidade da integral. Se $1 \leq p < \infty$, basta aplicar o item anterior para $|f|$. □